

総合研究大学院大学高エネルギー加速器科学研究所

5年一貫制博士課程入学試験問題

物 理

平成25年9月3日（火）13時00分～16時00分

注意

☆ 答案用紙の所定の欄に、受験番号、氏名を記入すること。

☆ 各自に計算用紙1枚が配布されていることを確認すること。

☆ 8問の中から、4問を選んで解答せよ。

ただし、素粒子原子核専攻理論部門を志望する（志望順位を問わ  
ず）受験者は第1問及び第2問を必ず選択しなければならない。

☆ 試験問題（4問）ごとに、異なった答案用紙を使用すること。

☆ 各問題に対して、答案用紙は複数使用してよいが、第〇〇問□□  
枚目というように、所定の欄に、選択した問題の番号及び答案用  
紙の順番を記入すること。解答できない場合も、受験番号、氏名、  
問題番号を記入し、提出すること。

☆ 答案用紙・計算用紙がさらに必要な場合は、挙手をして監督者に  
知らせること。

## 第1問

質量  $m$  の粒子が位置座標を  $x$ , 角振動数を  $\omega$  とする調和振動子型ポテンシャル

$$V = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

の中で束縛されている1次元の量子力学を考える。波動関数を  $\psi(x)$ , エネルギーを  $E$ , プランク定数  $h$  を  $2\pi$  で割ったものを  $\hbar$  として以下の設問に答えよ。なお, 最終的な答えを書くだけでなく, 計算の途中経過をきちんと説明せよ。

### 【問1】

パラメータ  $\alpha$  を用いて表した波動関数  $\psi(x) = A e^{-\alpha x^2}$  を仮定し, 変分法を用いてエネルギー  $E$

$$E = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) H \psi(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) \psi(x)}$$

を極小とする  $\alpha$  を求め, その基底状態のエネルギー  $E_0$  を求めよ。ここで  $H$  はハミルトニアンであり,  $c$  を正の定数とするガウス積分の結果  $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-cx^2} = \sqrt{\frac{\pi}{c}}$  を用いよ。また, 規格化定数  $A$  を求めることにより基底状態の波動関数を示せ。ただし,  $A$  は正の実数とする。

### 【問2】

基底状態の波動関数を用いて位置と運動量のゆらぎ

$$(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle, \quad (\Delta p)^2 = \langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle$$

を計算し, 位置と運動量の不確定性関係が満たされていることを示せ。ここで  $\langle O \rangle$  は  $O$  の期待値である。

### 【問3】

基底状態のエネルギー  $E_0$  に対して,  $E_0 < m \omega^2 x^2 / 2$  の  $x$  領域に粒子が存在する確率  $P$  を求めよ。ここで, 必要ならば誤差関数  $\text{erf}(z) \equiv (2/\sqrt{\pi}) \int_0^z dy e^{-y^2}$ ,  $\text{erf}(1) = 0.84$  を用いよ。

**【問4】**

$\hbar \rightarrow 0$  の極限を取った場合, 【問3】で求めた存在確率  $P$  は古典的には一見0である様に思えるが, 実際には有限な定数である. なぜ0でない定数であるか説明せよ.

**【問5】**

【問1】と同様に, 変分法を用いることにより第1励起状態のエネルギーを求めることができる. 第1励起状態の波動関数をどの様を選べばよいか理由を説明し, 関数形を示せ. なお, この問題では【問1】の様な具体的な計算をする必要はない. また, 横軸を  $x$  に取り, 基底状態と第一励起状態の波動関数を図示せよ.

## 第2問

温度  $T$  の3次元理想フェルミ気体を考える。スピンは  $1/2$  とする。

### 【問1】

化学ポテンシャル  $\mu$  を持つ粒子が、エネルギー  $E$  の状態を  $\ell$  個占める確率は  $e^{\ell(\mu-E)/kT}$  に比例する。これより分布関数

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/kT} + 1}, \quad (1)$$

を導け。

### 【問2】

低温  $kT \ll \mu$  での（強く縮退した）分布関数を図にせよ。ここで分布関数の値が  $1/2$  になるエネルギーの値と、分布関数の値が大きく変化するエネルギー幅の大まかな値を記入せよ。

### 【問3】

温度  $T = 0$  での粒子数密度  $n$  を分布関数の運動量積分から求めよ。ここで位相空間の状態密度が  $\frac{2}{h^3}f$  であることに注意せよ。また、エネルギーと運動量の関係

$$\mu = (p_F^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2}, \quad (2)$$

を満たすフェルミ運動量  $p_F$  を用いて良い。

### 【問4】

温度  $T = 0$  での圧力  $P$  を、超相対論的な場合  $p_F \gg mc$  と非相対論的な場合  $p_F \ll mc$  に対して求めよ。ここで圧力は  $pv/3 = p^2 c^2 / 3E$  に分布関数の重みをかけて運動量積分する。またエネルギーと運動量の関係は  $E = (p^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2}$  である。

### 【問5】

温度  $T = 0$  での状態方程式  $P \propto n^\gamma$  における指数  $\gamma$  を、超相対論的な場合  $p_F \gg mc$  と非相対論的な場合  $p_F \ll mc$  に対して求めよ。

### 【問6】

自由気体である電子と陽子が温度  $T = 0$  で平衡にあるとする。密度が高くなると逆  $\beta$  崩壊



によって中性子が生まれる。中性子が初めて現れる粒子数密度を求めてみよう。

1. 電荷保存より電子と陽子の粒子数密度は等しい. これより電子と陽子のフェルミ運動量の関係を求めよ.
2. 電子, 陽子, 中性子が平衡にあるとして, 中性子の粒子数密度が 0 を超える時の電子の粒子数密度を求めよ. ここでニュートリノの化学ポテンシャルは無視せよ. また電子, 陽子, 中性子の質量をそれぞれ  $m_e$ ,  $m_p$ ,  $m_n$  としたとき,  $m_n - m_p \ll m_p$ ,  $m_e \ll m_p$  の極限で考えよ.

### 第3問

図1のような大気中に置かれたX線の干渉計について考える。この干渉計は等間隔に並んだ三枚の半透鏡から成り、入射した単色X線はまず一枚目の半透鏡で二つの光線に分かれる。次に、各光線は二枚目の半透鏡で向きを変え、三枚目の半透鏡で合流して干渉する。干渉計内の一方の光路に試料、他方の光路に平板状の位相板を置き、干渉計を出射した干渉光の強度を検出器で測定する。この干渉計について以下の問いに答えよ。

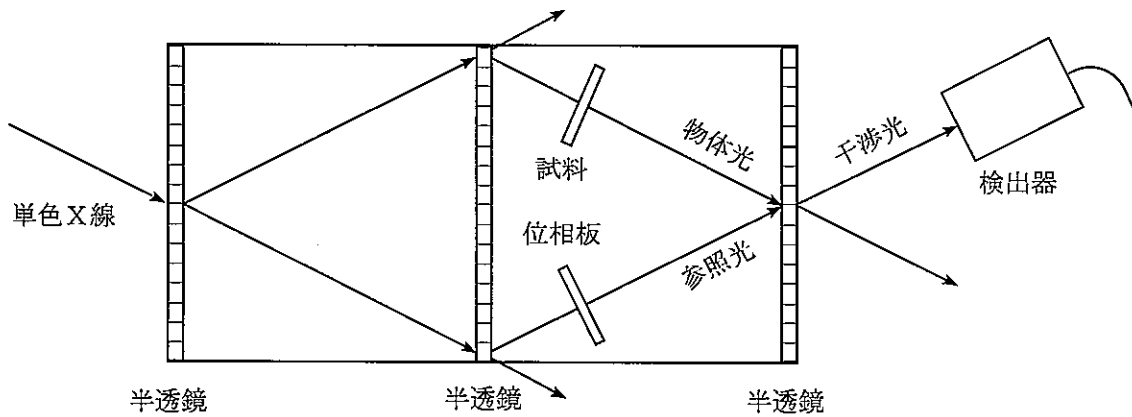


図1

#### 【問1】

X線のエネルギー $E$ （単位は電子ボルト eV）と波長 $\lambda$ （単位はナノメートル nm）との間には

$$\lambda(\text{nm}) = \frac{a}{E(\text{eV})}$$

の関係式が成り立つ。この式の定数 $a$ を求めよ。必要なら、プランク定数として $h = 6.6 \times 10^{-34}$  Js、光速として $c = 3.0 \times 10^8$  m/s、電気素量として $e = 1.6 \times 10^{-19}$  Cを用いよ。

【問2】

通常、X線干渉計では半透鏡としてシリコン結晶の平板が用いられる。図2はその配置の一例を示したものであり、結晶表面に対して垂直に(220)面が並んでいる。X線をこの(220)面に対してブラッグ条件を満たすように入射させると、透過X線に加えて回折X線が生じ、結晶平板が半透鏡として機能する。

さて、結晶平板を出射した透過X線と回折X線のなす角度が $60^\circ$ の時、入射X線の波長を求めよ。なお、シリコン結晶の(220)面の格子面間隔として $d = 0.192 \text{ nm}$ を用いよ。

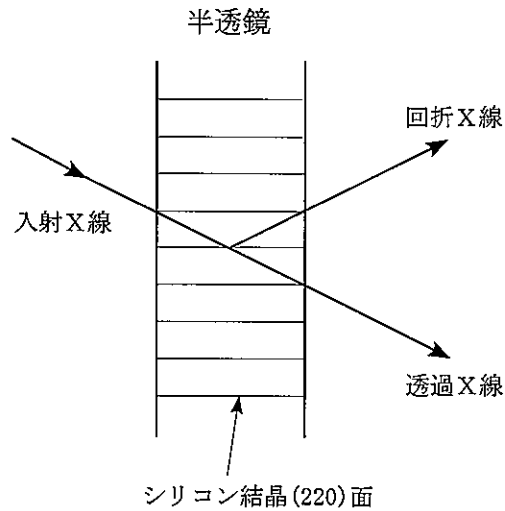


図2

【問3】

波長 $0.1 \text{ nm}$ のX線が屈折率 $n = 1 - \delta$ の位相板に垂直に入射して、位相板を透過したX線の位相が位相板の無い時と比べて $\pi/2$ 変化したとする。このときの位相板の厚さを求めよ。 $\delta$ の値は大気中では $0.0$ 、位相板中では $1.0 \times 10^{-6}$ とする。

ただし、屈折率 $n$ の等方的物質中を $z$ 軸方向に沿って進むX線の電場の $x$ 成分は

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left(\frac{2n\pi}{\lambda_0} z - \omega t + \phi\right)$$

と表されるものとする。ここで $\lambda_0$ は大気中のX線の波長、 $\omega$ は角振動数、 $t$ は時間、 $\phi$ は位相である。

【問 4】

検出器に入射する，参照光と物体光による干渉光の強度は

$$I = |E_R \cos(\phi_R - \omega t) + E_S \cos(\phi_S - \omega t)|^2$$

で与えられるものとする．ここで，右辺の第 1 項は参照光の電場成分の寄与，第 2 項は物体光の電場成分の寄与である．なお，位相  $\phi_S$  は  $-\pi/2 < \phi_S < \pi/2$  の範囲にあるとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 干渉光の強度  $I$  の時間平均を

$$\bar{I} = a_0 + a_1 \cos \phi_R + b_1 \sin \phi_R$$

と表したとき，定数  $a_1$  と  $b_1$  を  $E_R$ ， $E_S$ ， $\phi_S$  を用いて表せ．また，

$$\phi_S = \tan^{-1}(b_1/a_1)$$

の関係式が成り立つことを示せ．

(2) 図 1 の位相板の厚さを制御して，参照光の位相  $\phi_R$  を周期  $2\pi$  の  $1/m$  ごとに， $m$  段階変化させる場合を考える ( $m$  は 3 以上の整数)．このとき，参照光の位相  $\phi_R$  の  $j$  番目の大きさを  $\phi_{Rj} = j(2\pi/m)$ ，その時の干渉光の強度を  $\bar{I}_j$  とおくと，物体光の位相  $\phi_S$  は

$$\phi_S = \tan^{-1} \left( \frac{\sum_{j=1}^m \bar{I}_j \sin \phi_{Rj}}{\sum_{j=1}^m \bar{I}_j \cos \phi_{Rj}} \right)$$

で与えられることを導け．なお，位相板による X 線の吸収は無視できるとする．

(3) 参照光の位相  $\phi_R$  を  $\pi/2$  ごとに 4 段階変化させて，検出器で干渉光の強度を観測したところ，ある単位系で  $\bar{I}_1 = 240$ ， $\bar{I}_2 = 80$ ， $\bar{I}_3 = 80$ ， $\bar{I}_4 = 240$  となった．この結果から，前問の式を用いて物体光の位相  $\phi_S$  を求めよ．



#### 第4問

固体表面におけるCO分子とO原子の化学反応をX線吸収分光法により追跡した実験に関する以下の間に答えよ。ここでは、固体表面において、CO分子はO原子と反応し、CO<sub>2</sub>となって脱離するものとする。

#### 【問1】

図1はCO分子の分子軌道と、そのエネルギー準位の模式図で、図2はCO分子によるX線吸収スペクトル(X線の吸収量のエネルギー依存性)である。図2の①と②のピークは、それぞれのX線エネルギーにおいて、ある電子遷移が起こっていることを示している。①と②のピークに対応する電子遷移を図1の分子軌道の記号を用いて答えよ。

分子軌道エネルギー  
(電子ボルト)

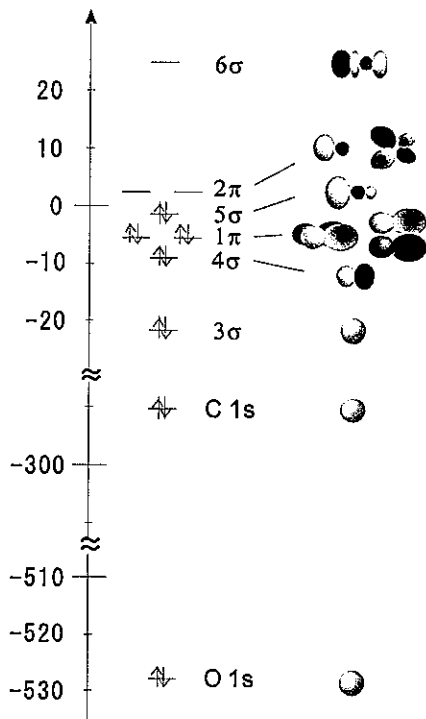


図1

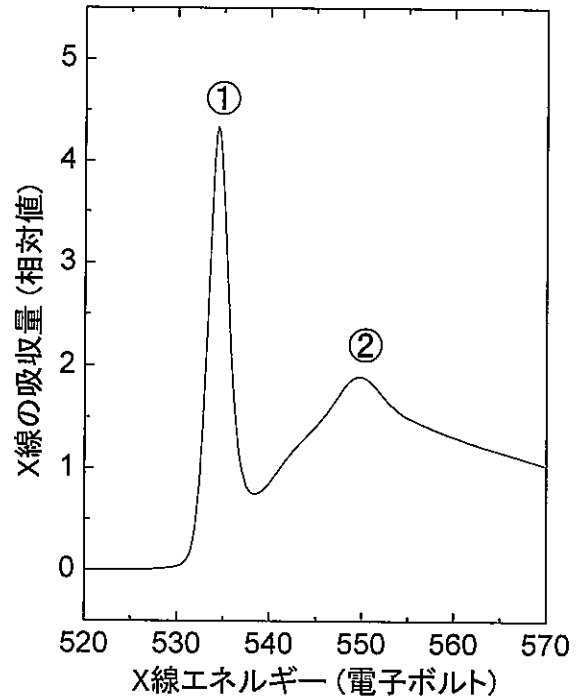


図2

【問2】

固体表面におけるCO分子とO原子との反応の間に、それぞれの物質の吸着量がどのように変化するかを、X線吸収分光法を用いて観察した。X線の吸収量は、気体の分子や原子によるX線の吸収を無視すれば、表面に吸着した分子や原子の吸着量に比例する。最初に述べたとおり、反応の結果生じるCO<sub>2</sub>は表面から脱離するため、観測されるのは表面に吸着したCO分子とO原子のみとなる。

固体表面にO原子を0.4原子層(ML)吸着させたところ、図3(a)のようなX線吸収スペクトルが得られた。この表面をCO分子のガスにさらしてO原子とCO分子を反応させたところ、十分時間が経過すると表面は全てCO分子に覆われ、そのときのX線吸収スペクトルは図3(d)のようになった。このときのCOの吸着量は0.5MLであることが知られている。この実験において、反応開始から $t_b$ 、 $t_c$ が経過した時点で得られたX線吸収スペクトル(b)、(c)から、それぞれの時点におけるO原子とCO分子の吸着量(単位はML)の組み合わせを以下の(あ)~(か)のうちから選び、その理由を述べよ。

なお、固体の表面を構成する原子の数と同じ数の分子または原子が吸着している状態を1MLと定義する。

	(あ)	(い)	(う)	(え)	(お)	(か)
O原子の吸着量	0.3	0.3	0.3	0.15	0.15	0.15
CO分子の吸着量	0.5	0.25	0.1	0.5	0.25	0.1

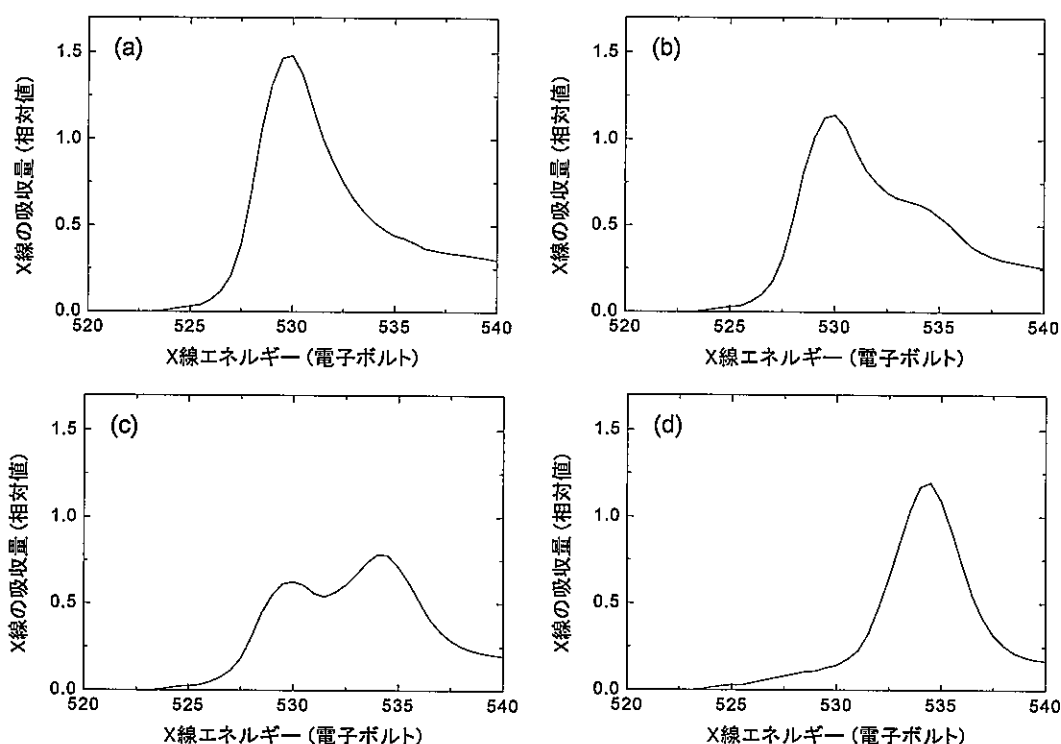


図3

【問3】

ここでは CO 分子と O 原子の反応速度について考える. 表面において CO と O が十分速く動くことができ, CO と O の化学反応が 1 分子の CO と 1 原子の O が出会うことによって起こるとすると, 反応の起こる確率は CO と O それぞれの吸着量に比例すると考えられ, その比例係数を反応速度定数  $k$  とよぶ.

問 2 で求めた, 反応中の表面における CO 分子と O 原子の吸着量  $\theta_{CO}$  と  $\theta_O$  を, 反応開始からの時間 ( $t$ ) に対してプロットしたところ図 4 のようになった. CO と O の反応が上記の条件を満たす場合,  $\theta_O$  の時間変化  $d\theta_O/dt$  を反応速度定数  $k$ ,  $\theta_{CO}$ ,  $\theta_O$  で表せ. また, 図 4 から 400 K と 550 K とではどちらの反応速度定数  $k$  が大きいと結論できるかを, その理由とともに答えよ.

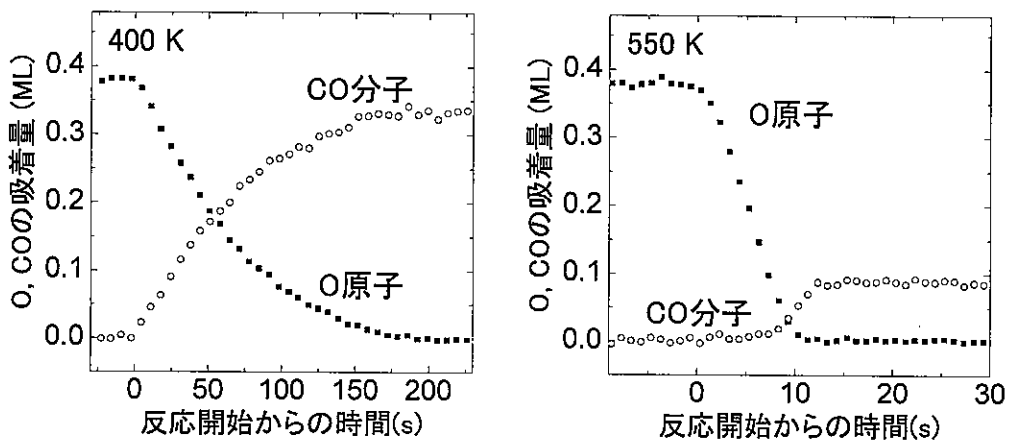


図 4

【問4】

反応速度定数  $k$  の温度依存性は、反応の活性化エネルギー  $E_a$  を用いて、

$$k = A \exp\left(\frac{-E_a}{k_B T}\right)$$

と表せる。ここで、前指数因子  $A$  は温度によらない定数、 $k_B$  はボルツマン定数である。

反応速度定数  $k$  ( $\text{ML}^{-1}\text{s}^{-1}$ ) の自然対数  $\ln k$  を、温度  $T$  の逆数  $1/T$  に対してプロットしたものを図5に示す。このアレニウスプロットから、 $E_a$  を求める方法を具体的に答えよ。

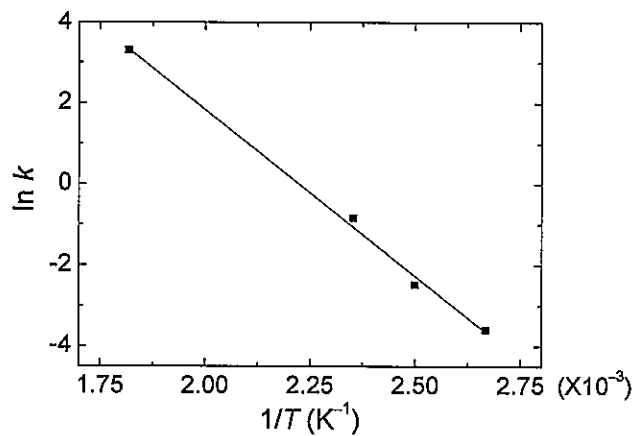


図5

【問5】

図6に固体Aと固体Bの表面におけるCOとOの反応に対するアレニウスプロットを示す。表面での反応の活性化エネルギーが高いのは、固体Aと固体Bのどちらか、その理由とともに答えよ。

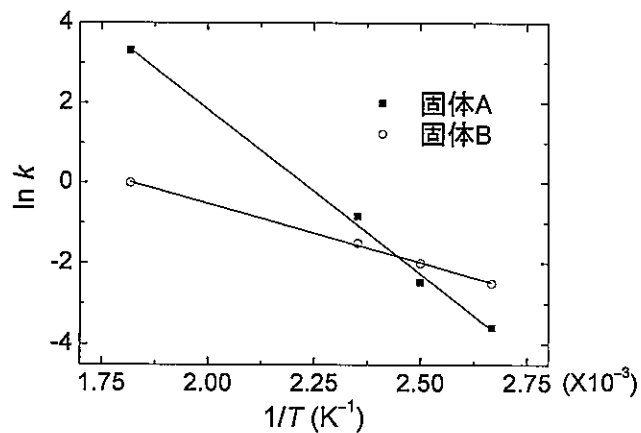


図6

## 第5問

スカラーポテンシャル  $\phi(\mathbf{r}, t)$ , ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  で与えられる電磁場中の荷電粒子 (質量  $m$ , 電荷  $q > 0$ ) の運動を考える. ここで, 時刻  $t$  での粒子の位置ベクトルを  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  とする. 粒子の運動は非相対論的に扱えるものとして, 以下の問いに答えよ.

### 【問1】

荷電粒子のラグランジアン

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} - q\phi$$

にルジャンドル変換

$$\begin{cases} H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L \\ \mathbf{p} = \partial L / \partial \dot{\mathbf{r}} \end{cases}$$

を施すことで, ハミルトニアン  $H$  が

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t) = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\phi$$

と書けることを示せ. 但し,  $\dot{\mathbf{r}} \equiv d\mathbf{r}/dt$  である.

### 【問2】

正準方程式

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \end{cases}$$

が

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

となることを示せ. 但し,  $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}}$  である. また,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  はそれぞれ電場と磁束密度で  $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ ,  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  を満たす.

### 【問3】

$\mathbf{E} = \mathbf{0}$  のとき, 荷電粒子の全運動エネルギー  $mv^2/2$  が保存量であることを示せ.

次に、図1のように  $B_1$ ,  $B_2$  を定数として、領域1から領域2にかけて磁束密度  $B$  が  $(0, 0, B_1)$  から  $(0, 0, B_2)$  へと緩やかに増加する系を考える。時刻  $t = 0$  に領域1内の位置  $r = (0, 0, 0)$  から初速度  $v = (v_0 \sin \alpha, 0, v_0 \cos \alpha)$  で入射された荷電粒子の運動を考察する。但し、 $0 < B_1 < B_2$ ,  $v_0 > 0$ ,  $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$  とする。

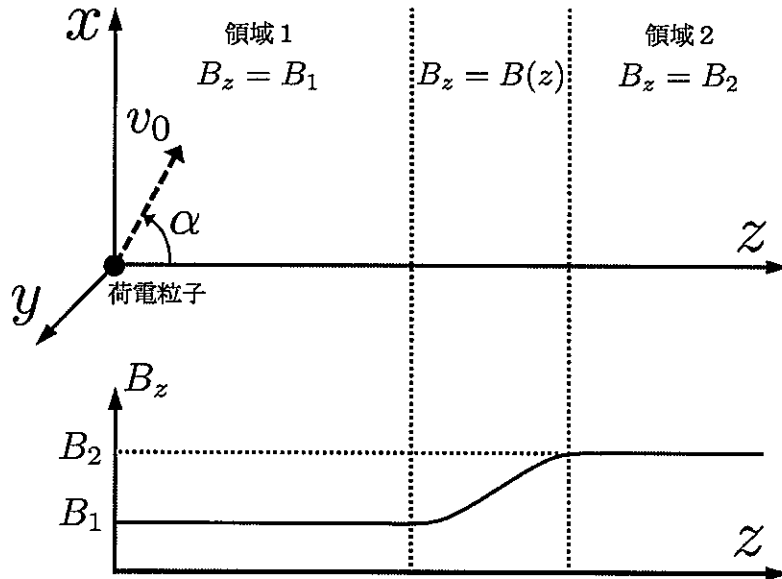


図 1

【問 4】

領域1内での粒子の運動を考える。運動方程式を解くことで、粒子の  $z$  軸方向の運動は等速直線運動であること、及び  $x$ - $y$  平面に射影した粒子の運動は等速円運動であることを示せ。また、円運動の中心の  $x, y$  座標と半径を求めよ。

【問 5】

粒子が感じる磁場の変化が、前問の円運動の周期に比べて十分に緩やかである場合を扱う。このとき、粒子の円運動から生じる磁気モーメント

$$\mu_m \equiv \frac{mv_{\perp}^2}{2B_z}$$

は全領域で保存する（断熱不変量）。ここで、 $v_{\perp}$  は粒子の  $z$  軸に直交する方向の速度、また、 $B_z$  は磁束密度の  $z$  方向の成分である。この事実に留意し、荷電粒子が領域2に到達することができる入射角  $\alpha$  の条件を求めよ。

## 第6問

以下の問題では、MKSA 単位系を用いること。

### 【問1】

接地した無限に広い導体平面から距離  $a$  離れた点  $P$  に電荷  $Q$  を置いた場合の真空中の電場を求める。導体平面に対し、点  $P$  と対称の点  $P'$  に仮想的な鏡像電荷  $-Q$  を置くことにより、境界条件を満足する静電場を容易に求めることができる。

- (1) 図1のように、 $y$ - $z$  平面 ( $x=0$ ) に導体平面があるとし、空間の点  $A(x, y, z)$  における静電ポテンシャル  $\phi$  を求めよ。真空の誘電率は  $\epsilon_0$  とする。

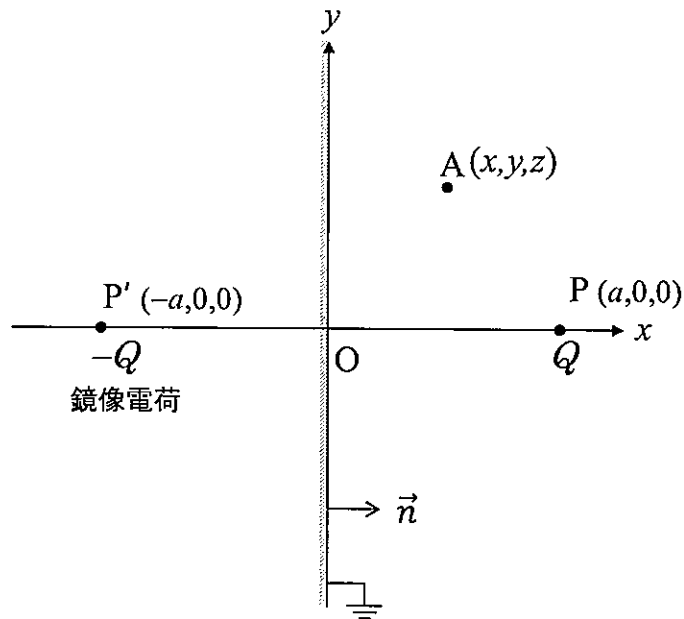


図1

- (2) 点  $A$  における電場を求めよ。電場は、

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi$$

によって求めることができる。単位ベクトル  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  を用いて表せ。

- (3) 導体平面上に誘導される電荷密度  $\sigma$  は、図1のような導体面に垂直な法線ベクトル  $\vec{n}$  を用いて

$$\sigma = \epsilon_0 \vec{n} \cdot \vec{E}$$

で表される。無限導体平面上で  $\sigma$  を積分し、表面に誘導される総電荷が  $-Q$  になることを示せ。

【問 2】

線電荷密度  $\lambda$  の無限に長い線電荷から距離  $d$  離れた真空中での電場の強さは,

$$E(d) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d}$$

で表される。真空の誘電率は  $\epsilon_0$  とする。これを使って以下の問いに答えよ。

内側の半径を  $R$  とする無限長円筒導体内で、中心軸から距離  $a$  離れた  $x$  軸上に線電荷密度  $\lambda$  の無限長線電荷があるとする。この線電荷が円筒導体内に作り出す電場について考える。図 2 に示すように、線電荷密度  $-\lambda$  の鏡像線電荷を中心から距離  $h$  のところに置くことにより、円筒導体内側の電場を求めることができる。円筒導体は接地されているとし、円筒内側は真空とする。

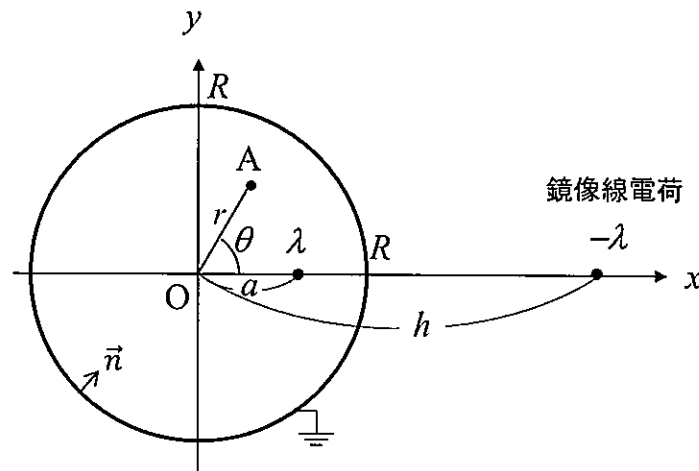


図 2

(1) 円筒導体内壁が等ポテンシャル面となるには、距離  $h$  は  $h = R^2/a$  であることを示せ。

(2) 円筒中心から距離  $r$ 、角度  $\theta$  の位置にある点  $A(r \cos \theta, r \sin \theta)$  での静電ポテンシャル  $\phi(r, \theta)$  を求めよ。

(3) 円筒導体内壁面に誘導される電荷密度  $\sigma$  は、

$$\sigma(R, \theta) = \frac{-\lambda}{2\pi R} \frac{R^2 - a^2}{R^2 - 2aR \cos \theta + a^2}$$

となることを示せ。



### 第7問

一様な磁束密度  $\mathbf{B}$  中で  $\mathbf{B}$  と垂直な平面内を円運動する荷電粒子を考える。この荷電粒子の電荷を  $q$ 、運動量の大きさを  $|\mathbf{p}|$  とすると、円軌道の半径は

$$\rho = \frac{|\mathbf{p}|}{|q\mathbf{B}|}$$

で与えられる。従って、磁束密度の大きさと荷電粒子の電荷の大きさを知っていれば、荷電粒子の飛跡を検出し半径  $\rho$  を測定することで

$$|\mathbf{p}| = |q\mathbf{B}| \rho$$

によって運動量の大きさを決定できる。この方法による運動量測定に関する以下の問に答えよ。

#### 【問1】

- (1)  $Q = q/e$  を素電荷 ( $e = 1.6 \times 10^{-19}$  C) を単位にした荷電粒子の電荷とし、運動量の大きさに (GeV/c)、円軌道の半径に (m)、磁束密度に (T) の単位を使うと、

$$|\mathbf{p}| = 0.30 \times |Q| |\mathbf{B}| \rho$$

となることを示せ。ここで  $c = 3.0 \times 10^8$  m/s は光速とする。

- (2) (1)の結果を用いて、運動量の大きさが  $|\mathbf{p}| = 100$  GeV/c の単位電荷  $Q = 1$  を持った荷電粒子が一様な磁束密度  $|\mathbf{B}| = 4.0$  T の中で円運動する場合の軌道半径  $\rho$  を有効数字 2 桁で求めよ。
- (3) 運動量が大きく  $\rho$  が大きい場合、飛跡検出器の大きさの制約により、 $\rho$  の決定のための飛跡測定は実際上円軌道のごく一部に限られる。飛跡測定の区間の長さを  $L$  とし、その区間において等間隔に  $N$  点、円軌道平面内で飛跡測定区間の始点と終点を結ぶ直線に垂直方向 ( $x$  軸方向) の位置測定を行うことで、軌道半径  $\rho$  を推定する。測定点あたりの  $x$  座標の位置分解能を  $\sigma_x$  とすると、軌道半径  $\rho$  の逆数の分解能は、近似的に

$$\sigma_{1/\rho} = \frac{\sigma_x}{L^2} \sqrt{\frac{720}{N+4}}$$

となることが知られている。この公式を用いて、測定区間の長さが  $L = 1.0$  m、測定点の数が  $N = 100$ 、位置分解能が  $\sigma_x = 100$   $\mu\text{m}$  の場合に、(2)の荷電粒子に対する運動量分解能が何%になるか有効数字 2 桁で求めよ。ただし、測定器の中での多重散乱や電離損失は無視できるとする。

【問2】

質量  $M$  の中性不安定粒子が、質量  $m_1$ 、質量  $m_2$  の2つの単位電荷 ( $Q = \pm 1$ ) を持った安定荷電粒子へ2体崩壊すると仮定せよ。崩壊で生まれる子供粒子の種類は同定されており、よって  $m_1$ 、 $m_2$  は分かっているが、 $M$  は知られていないとする。そこで、子供粒子の運動量  $\mathbf{p}_1$ 、 $\mathbf{p}_2$  を測定し親粒子の質量  $M$  を決める実験を考える。子供粒子の運動量は、【問1】で考察したように、一様な磁束密度  $\mathbf{B}$  中で、子供粒子である2つの荷電粒子の飛跡を飛跡検出器で測定することによって求める。簡単のため、親粒子は実験室系で静止しており、崩壊で生じた子供粒子の運動量は磁場に垂直で円運動するとする。

(1) 親粒子の静止系における子供粒子の運動量の絶対値  $p^*$  を与える公式：

$$p^* = \frac{Mc}{2} \sqrt{1 - 2(X_1 + X_2) + (X_1 - X_2)^2}$$

を、親粒子の崩壊前後のエネルギー・運動量保存則から導け。ここで  $c$  は光速、 $X_1$ 、 $X_2$  は次式：

$$X_i = \left( \frac{m_i}{M} \right)^2 \quad (i = 1, 2)$$

で定義される。導出には、一般に質量  $m$ 、運動量  $\mathbf{p}$  の粒子のエネルギー  $E$  が

$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + (\mathbf{p}c)^2}$$

で与えられることを用いてよい。

- (2)  $M = 200 \text{ GeV}/c^2$  で  $m_1 = m_2 = 100 \text{ MeV}/c^2$  の場合、 $p^*$  の値を有効数字 2 桁まで ( $\text{GeV}/c$ ) の単位で求めよ。
- (3) (2) の条件下で【問1】(3)の測定器を用いた場合、 $M$  測定の質量分解能の値を有効数字 2 桁まで ( $\text{GeV}/c^2$ ) の単位で求めよ。ただし2つの子供粒子の運動量測定は統計的に独立とする。
- (4) 質量  $M$  を 0.1%の分解能で決めたい場合、崩壊事象を何事象測定する必要があるか有効数字 2 桁で答えよ。ただし、親粒子の崩壊幅は質量分解能に比べて完全に無視できる程度に小さく、また系統誤差はないとせよ。

### 第8問

加速器では荷電粒子の加速や蓄積は必ず真空中で行われ、真空は重要な役割を担っている。ここでは、真空中の気体分子の運動と圧力について簡単に考察する。

#### 【問1】

図1のように体積  $V$  の容器の中に  $N$  個の気体分子が閉じ込められた、温度  $T$  の熱平衡状態の系がある。この系で下記の理想気体の状態方程式が成り立つとして、以下の間に答えよ。

$$PV = N k_B T$$

ただし、 $P$  は容器内の圧力、 $k_B$  はボルツマン定数である。

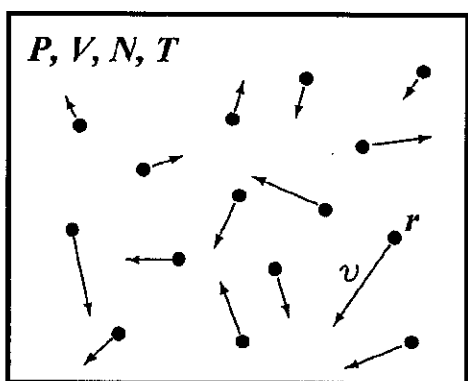


図1

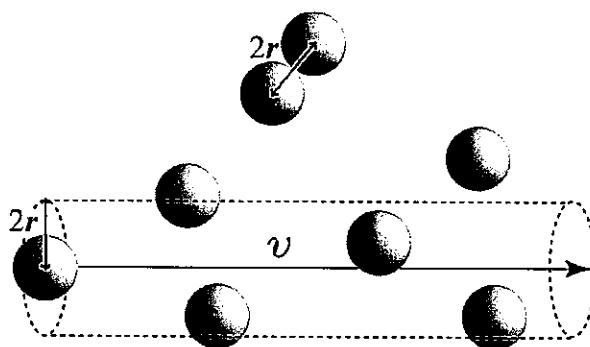


図2

(1) 分子同士が衝突すること無く進む距離の平均値を平均自由行程という。次の簡略的な平均自由行程の説明の中の①、②にあてはまる式を示せ。

半径  $r$  の分子同士は分子間距離が  $2r$  より近くなるときに衝突する。ここでは簡単のため分子が速さ  $v$  で常に移動し、他の分子はすべて静止して均一に分布していると考え。

図2のように半径  $2r$  で単位時間に覆う円筒空間の体積は (①) となり、①と分子数密度  $n$  ( $=N/V$ ) との積が単位時間当たりに分子同士が衝突する回数である。単位時間に分子が進む距離をこの回数で割った値が平均自由行程  $\lambda =$  (②) となる。

(2) 圧力  $1.0 \times 10^{-6}$  Pa、温度 300 K の Ar について、分子数密度  $n$  [ $\text{m}^{-3}$ ] および(1)で示した平均自由行程  $\lambda$  [m] を有効数字2桁で求めよ。Ar の半径  $r = 1.9 \times 10^{-10}$  m、 $k_B = 1.4 \times 10^{-23}$

J/K とする。また、 $n$  [ $\text{m}^{-3}$ ] =  $\frac{P$  [Pa]}{ $k_B$  [J/K]  $\cdot T$  [K]} の両辺の単位が一致することを示せ。

【問2】

図3に示すように容器に小さい孔があり、容器内の分子がこの孔を通して外へ排気され、かつ容器内に一定量の分子を供給し続けるガス源がある。また温度  $T$ 、体積  $V$  は一定で常に熱平衡状態が成り立っている場合を考える。

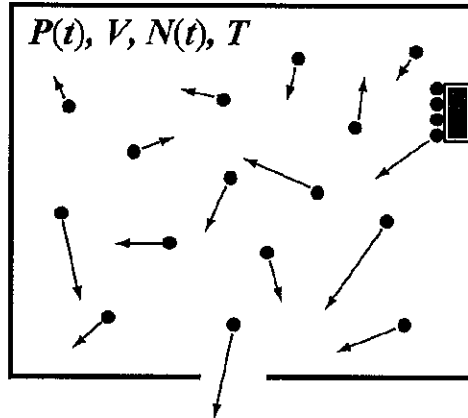


図3

容器内の圧力  $P(t)$  の時間変化は、分子の平均自由行程が容器のサイズよりも十分大きいとき、気体の状態方程式から以下の微分方程式で記述される。

$$\frac{dP(t)}{dt} V = Q - P(t) \cdot S$$

ここで  $Q$  は全気体放出速度 [ $\text{Pa m}^3/\text{s}$ ]、 $S$  は排気速度 [ $\text{m}^3/\text{s}$ ] と呼ばれる定数である。

- (1)  $Q=0$  の場合、 $t=0$  での圧力を  $P_0$  としてこの微分方程式を解き、圧力  $P(t)$  を求めよ。
- (2)  $Q \neq 0$  の場合、 $t=0$  での圧力を  $P_0$  としてこの微分方程式を解き、圧力  $P(t)$  を求めよ。
- (3) (2) で求めた  $P(t)$  で  $t \rightarrow \infty$  の時の圧力  $P(\infty)$  を求めよ。この時の圧力を到達圧力と呼ぶ。
- (4) ある真空容器が排気速度  $0.10 \text{ m}^3/\text{s}$  で排気され、到達圧力が  $1.0 \times 10^{-7} \text{ Pa}$  であった。このときの全気体放出速度  $Q$  [ $\text{Pa m}^3/\text{s}$ ] を有効数字2桁で求めよ。また温度が  $300 \text{ K}$  のとき、毎秒何個の分子が排気されているか有効数字2桁で求めよ。