

総合研究大学院大学高エネルギー加速器科学研究所

物質構造科学専攻 専門科目

5年一貫制博士課程入学試験問題

平成28年8月24日(水) 13時00分～16時00分

注意

- ☆ 答案用紙の所定の欄に、受験番号、氏名を記入すること。
- ☆ 各自に計算用紙1枚が配布されていることを確認すること。
- ☆ 数学基本問題、数学標準問題、物理基本問題、物理標準問題、化学基本問題、化学標準問題、生物基本問題、生物標準問題の中から、4つを選んで解答すること。
- ☆ 各自、採点を希望する4つの問題の答案用紙だけを試験終了時に提出すること。
- ☆ 各問題に対して、答案用紙は複数使用してよいが、(○○○○)問題(□)枚目「例えば、(数学 基本)問題 (1)枚目」というように、所定の欄に、選択した問題名および答案用紙の順番を記入すること。解答できない場合も、受験番号、氏名、問題名を記入して提出すること。
- ☆ 答案用紙・計算用紙がさらに必要な場合は、挙手をして監督者に知らせること。



問題は次頁

数学 基本問題

実平面上で定義された関数,

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy \quad (a > 0)$$

を考える.

【問 1】 $\nabla f \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (0, 0)$ となる実数の組 (x, y) を求めよ.

【問 2】 以下の行列 (いわゆる Hesse 行列) を求めよ.

$$H_f \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

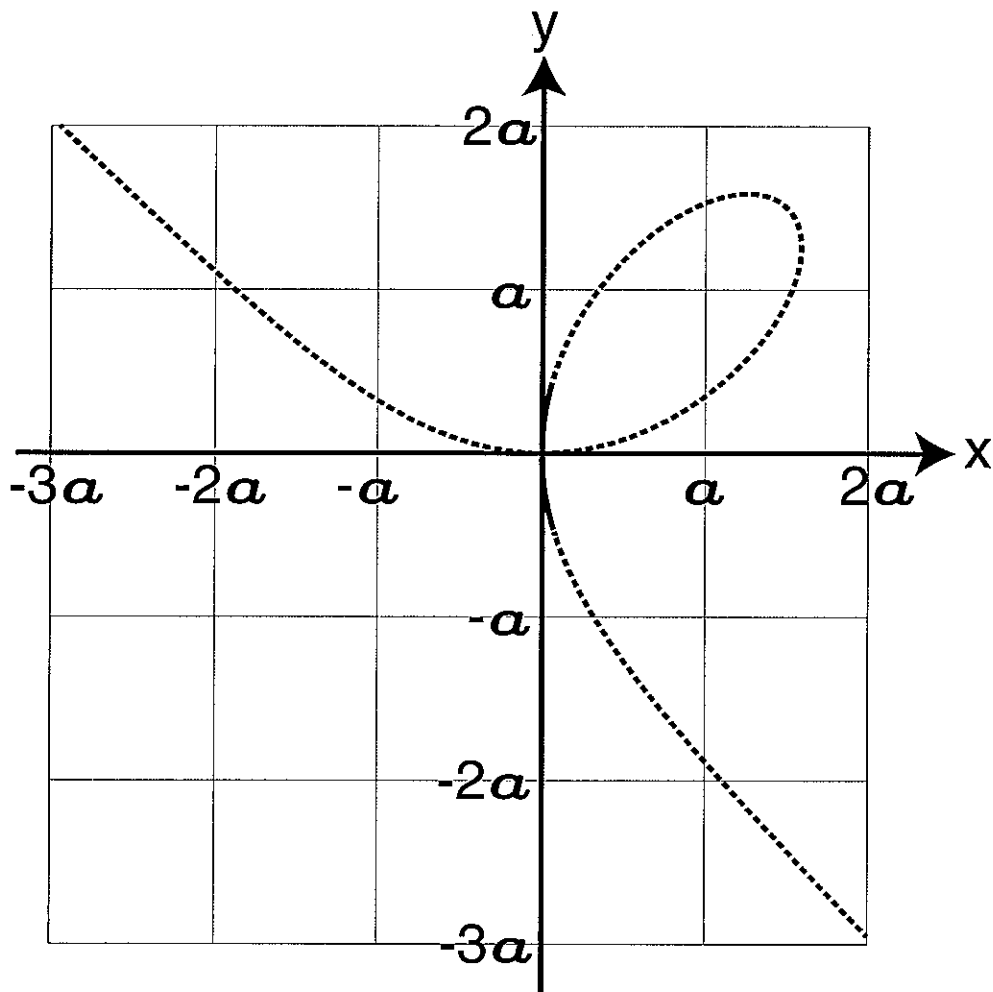
【問 3】 一般に $f(x+h, y+k)$ は, h, k が微小のとき,

$$f(x+h, y+k) \sim f(x, y) + \nabla f \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} H_f \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

と近似できる. これを使って, 問 1 で求めた (x, y) の組それぞれについて, $f(x+h, y+k)$ の値を h および k の 2 次まで求めよ.

【問 4】 問 3 の結果を利用して, $f(x, y)$ の極値点, および極値を求めよ.

【問 5】 $f(x, y) = 0$ の概形を以下(次頁の点線)に示す. これを参考に, $f(x, y) = \lambda$ の概形を, 実数 λ の値について場合分けをして示せ.



数学 標準問題

ベクトル $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を用いた微分方程式

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v} \times \vec{x} \quad (1)$$

に関する問いに答えよ。

【問1】

方程式 (1) について、 A を用いて以下のように書き換えたとき、行列 A を求めよ。

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$$

【問2】

(2) 式の性質を持つ正規直交基底 \vec{e}_i ($i=1,2,3$) と係数 λ ($\lambda > 0$) を求めよ。ただし、基底ベクトル

のひとつ \vec{e}_1 は実数 a および b を用いて $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ と表わされる条件で、解を求めよ。

$$(a^2 + b^2 = 1, a, b > 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} \times \vec{e}_1 = \lambda \vec{e}_2 \\ \vec{v} \times \vec{e}_2 = -\lambda \vec{e}_1 \\ \vec{v} \times \vec{e}_3 = 0 \end{array} \right\} \quad (2)$$

【問3】

行列 A は実直交行列 U を用いて,

$$A = U \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} U^t$$

とかけることを示せ。ただし、 U^t は U の転置行列である。

【問4】

\vec{x} を基底 \vec{e}_i を用いて,

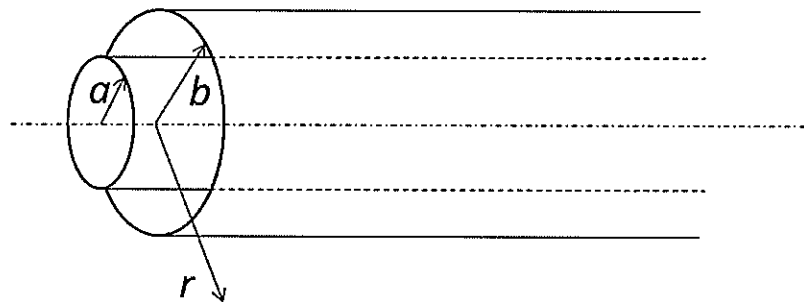
$$\vec{x} = \sum_{i=1}^3 q_i(t) \vec{e}_i$$

と展開する。係数 $q_i(t)$ に対する微分方程式を書き下し、その一般解を求めよ。

物理 基本問題

図のように真空中に置かれた十分に長い同軸状の半径 a, b ($a < b$) の中空導体円筒からなる同軸コンデンサーがある。導体円筒軸方向の単位長さあたりに、内側の導体円筒には $+q$ の電荷が、外側の導体円筒は $-q$ の電荷が一様に分布している。二つの中空導体の厚さは無視できるとする。

そのときに以下の問いに答えよ。ただし、半径方向の無限遠で電位は 0 とし、真空中の誘電率を ϵ_0 とする。



【問 1】

中心からの距離 r が、 $r < a$, $a < r < b$, $b < r$ の点における電界 E をそれぞれ求めよ。

【問 2】

問 1 の結果を用いて $r < a$, $a < r < b$, $b < r$ の点における電位 V をそれぞれ求めよ。

【問 3】

単位長さあたりの静電容量 C を求めよ。

【問 4】

二つの導体円筒の間に、比誘電率 ϵ_r の絶縁樹脂を導入した。このとき、 $r < a$, $a < r < b$, $b < r$ の点における電位 V と単位長さあたりの静電容量 C を求めよ。

物理標準問題は次頁

物理 標準問題

座標 x で記述される一次元空間において、 $x < 0$ 及び $x > 1$ に無限大のポテンシャル障壁があり、 $0 \leq x \leq 1$ に閉じ込められた質量 m の 1 個の自由粒子を考える。

【問 1】

波動関数を $\psi(x)$ とするとき、 $0 \leq x \leq 1$ においてこの粒子を記述する時間に依存しないシュレディンガー方程式を書け。エネルギーを E 、プランク定数を 2π で割ったものを \hbar とせよ。

【問 2】

境界条件を示せ。すなわち、 $x = 0$ 及び $x = 1$ における $\psi(x)$ を記せ。

【問 3】

シュレディンガー方程式を満たす規格化された波動関数とエネルギー固有値を求めよ。

【問 4】

基底状態と第一励起状態の波動関数の概形を図示せよ。

【問 5】

波動関数の規格直交性を証明せよ。

化学基本問題は次頁

化学 基本問題

第1問

物質の性質を考察する際に、原子間の結合の性質を考えることが役に立つ。次の問いに答えよ。

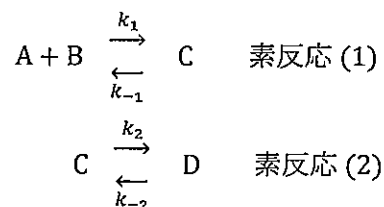
【問1】 共有性結合とイオン性結合の考え方は物質の性質を理解する上で有用となる。典型的である水素分子と塩化ナトリウムを例にして、2つの結合の違いがわかるように説明せよ。また、それらを水中に入れたときの挙動を説明せよ。

【問2】 炭化水素であるアセチレン、エチレン、エタンの3つの分子について、その炭素-炭素結合の解離エネルギーはどのような順序になるか予測せよ。なぜそのように予測したのか説明せよ。

【問3】 炭素の同素体には黒鉛とダイヤモンドが存在している。混成軌道の考え方に基づいて、それらの幾何学的構造を説明せよ。また、炭素の同素体として、近年になりフラーレン分子群が発見されている。その代表的な C_{60} 分子は切頂二十面体（サッカーボール状）構造を持つことが知られている。黒鉛（高配向熱分解グラファイト）・ダイヤモンドの構造と比較することにより、この C_{60} 分子の結合はどのような混成状態にあるのか推定せよ。

第2問

化学反応において反応速度と平衡状態の関係は重要である。次のような、反応物 A, B から中間体 C を経て生成物 D を生じる可逆反応について検討する。



ここで、 k_1 , k_{-1} および k_2 , k_{-2} は、素反応 (1) および (2) のそれぞれ正反応・逆反応の速度定数を表している。また、以下の問いでは化学種 A, B, C, D の濃度を $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[D]$ として答えよ。

【問1】 それぞれの素反応の速度方程式を、時間を表す変数に t を用いて書き表せ。

【問2】 平衡状態では速度方程式はどのような条件になるか答えよ。

【問3】 それぞれの素反応の平衡定数 K_1 および K_2 について速度定数を用いて書き表せ。

第3問

水溶液中の酸・塩基の性質について、次の問いに答えよ。以下に指定されていない化学種の濃度あるいは係数などについて、回答に必要であれば記号を各自で定義せよ。

【問1】 弱酸・弱塩基とはどのようなものか説明せよ。

【問2】 弱酸と弱塩基からなる塩の水溶液における水素イオン濃度 pH は、次の式により表されることを示せ。

$$\text{pH} = -\frac{1}{2}(\log_{10} K_a - \log_{10} K_b + \log_{10} K_w)$$

ここで、 K_a と K_b はそれぞれ弱酸と弱塩基の解離定数、 K_w は水のイオン積であるとする。

【問3】 代表的な弱酸に酢酸 CH_3COOH がある。その水溶液に塩 CH_3COONa を加えた溶液を調整したとする。

(1) 酢酸の濃度を c_a 、酢酸ナトリウムの濃度を c_s とする。 K_a を酢酸の解離定数であるとする、水素イオン濃度は

$$[\text{H}^+] \cong K_a \frac{c_a}{c_s}$$

と表されることを示せ。このとき、どのような近似をしているのか説明せよ。

(2) 1 L 中に 0.1 mol の CH_3COOH と 0.1 mol の CH_3COONa が溶けている水溶液があるとする。酢酸の解離定数は $1.77 \times 10^{-5} \text{ mol L}^{-1}$ であるとして、この溶液の pH を求めよ。計算には、必要となる $\log_{10}(1.77) = 0.248$ の値を用いよ。

(3) 小問(2)の水溶液に 0.01 mol の HCl を加えたときの pH の値を求めよ。計算には、必要となる $\log_{10}(2.16) = 0.334$ の値を用いよ。

(4) 1 L の純水に 0.01 mol の HCl を溶かしたとき、その水溶液の pH は 2.0 になる。この事実と小問(3)の結果を比べることにより、小問(2)で示した水溶液にはどのような性質があると言えるか説明せよ。また、そのような水溶液は何と呼ばれているか答えよ。

化学 標準問題

第1問

下記の化学反応から 3 つを選び、例（福山カップリング）を参考にして、反応物、生成物、特別な反応条件（温度・溶媒・触媒など、特記すべきことがなければ記述の必要なし）、特徴・意義（反応機構・利用法など）を説明せよ。反応（反応物、生成物、反応条件）については反応式を用いて説明しても良い（用いる記号については定義すること）。

例. 福山カップリング

反応物: チオエステルとハロゲン化有機亜鉛.

生成物: チオエステル由来のアルキルとハロゲン化有機亜鉛由来のアルキルからなるケトン.

反応条件: パラジウム触媒存在下.

特徴・意義: 穏和な反応条件で進行するため、反応しやすい官能基を許容する.

同種の結合生成反応では 3 級アルコールまで進行することがあるが、この反応ではケトンで停止する.

毒性の低い試薬が用いられるため、合成化学において有用である.

- ディールス・アルダー (Diels-Alder) 反応
- フリーデル・クラフツ (Friedel-Crafts) 反応
- フィッシャー・トロプシュ (Fischer-Tropsch) 反応
- 鈴木・宮浦カップリング
- 野依不斉水素化反応
- ハーバー・ボッシュ (Haber-Bosch) 法
- ウィッティヒ (Wittig) 反応
- 根岸カップリング

第2問

多電子原子の電子的構造は、原子軌道を電子が占有する殻モデルで考えることができる。そのようなモデルでは、基底状態の Li 原子および Be 原子は、それぞれ $(1s)^2(2s)^1$ および $(1s)^2(2s)^2$ の電子配置を持つと表される。これらの原子から電子を逐次取り出すために必要となるエネルギーは次のようであり、ここでは、そのようなエネルギーの定性的な関係について検討せよ。



【問1】 これらの中性原子から 2s 電子を 1 つ取り出すために必要となるエネルギー値 $E_1(\text{Li})$ と $E_1(\text{Be})$ の値の大小関係が $E_1(\text{Li}) < E_1(\text{Be})$ となる理由を説明せよ。

【問2】 Li 原子の第 2 逐次イオン化エネルギー $E_2(\text{Li})$ は、その第 1 イオン化エネルギー $E_1(\text{Li})$ に比べて急激に (10倍以上) 大きくなっている。一方で、Be 原子の場合には、そのような急激な変化は現れない (2倍程度)。なぜこのようなことが起きているのか説明せよ。

【問3】 放射光のように高いエネルギーを持つ光を利用すると、これらの原子の 1s 軌道から直接 1 つ電子を放出させることができる。Li 原子の 1s 光イオン化エネルギー $E_{1s}(\text{Li})$ と Be 原子の 1s 光イオン化エネルギー $E_{1s}(\text{Be})$ の大小関係を予測し、その理由を説明せよ。

第3問

分光実験に関する次の問いに答えよ。

【問1】 フォトンファクトリーでは 10 eV から 100 keV 程度の光を用いることができる。フォトンファクトリーでは、吸収スペクトル測定以外にどのような分光実験を行うことができるだろうか。測定が可能であると考えられる手法を 1 つ挙げ、どのようなことを調べることができるのか記述せよ。

【問2】 吸収スペクトルを測定する際には、波長 (エネルギー) を掃引しながら吸光度 A 相当の情報を記録する。透過法による測定では、入射した光強度 I_0 と試料を透過した後の光強度 I を比較することが必要になる。関連した次の問いに答えよ。

(1) 測定したい吸光度 A は、 I_0 と I を用いてどのように表されるか、等式により示せ。

(2) 吸光度測定により定量的な評価を行う際には、ランベルト・ベールの法則が成り立つ条件で実験が行われる。試料の厚さを l 、試料濃度を c とし、この法則について説明せよ。その際、他に必要となる量があるなら、用いる記号については定義すること。

(3) 家庭用アルミフォイルは 12 μm 程度の厚みのものが多い。光のエネルギーを 10 keV の X 線に設定して、12 μm 厚のアルミフォイルの光の透過率を測定したところ 92.3 % であった。この値を吸光度に変換せよ。計算には必要となる $\log_{10}(9.23) = 0.965$ を用いよ。

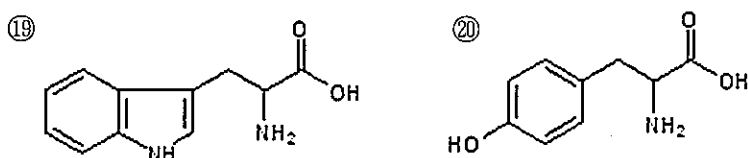
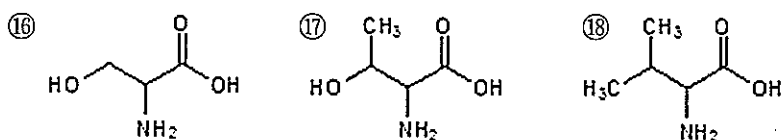
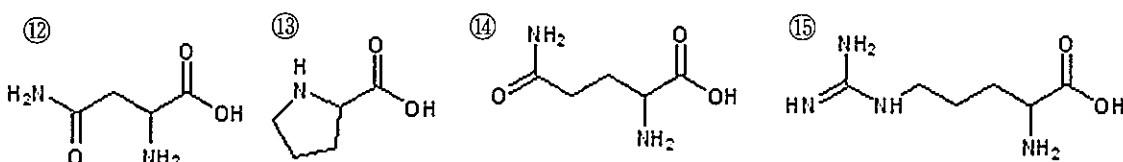
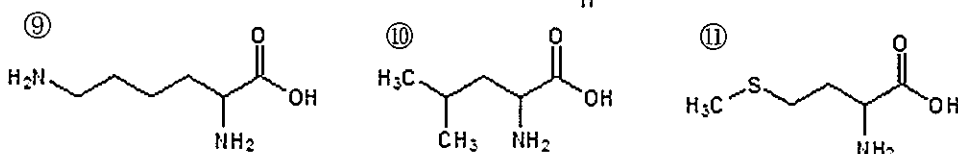
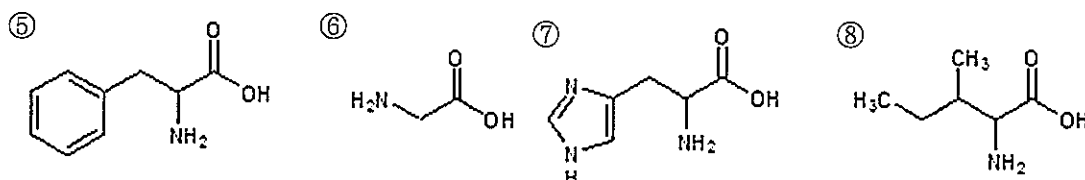
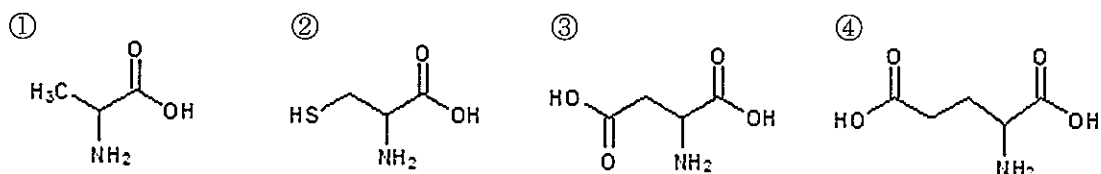
生物 基本問題

生体高分子，および細胞に関する以下の問いに答えよ。

【問 1】

以下に示すのはタンパク質を構成する 20 種類のアミノ酸の構造式である。これらのアミノ酸のうち，タンパク質分子中で以下の特徴を示すものを選択せよ。

- (1) 酸性の側鎖を持つもの
- (2) 塩基性の側鎖を持つもの
- (3) ジスルフィド結合を形成することが可能なもの
- (4) 翻訳後修飾でリン酸化される可能性があるもの



【問2】

生体膜に関する以下の問いに答えよ。

(1) 以下の文章のア～キに当てはまる語句を答えよ。

生体膜の主成分である(ア)は頭部と尾部とに分けられるが頭部は(イ)性であり、一方尾部は(ウ)性である。このため水溶液中では頭部を(エ)側に、尾部を(オ)側にするように膜をつくることから、生体膜の構造は(カ)層と呼ばれている。生体膜内在性の膜タンパク質は一般に強い(ク)性の膜貫通部分を持つ。したがって、膜タンパク質を抽出する際には(キ)を用いて可溶化する必要がある。

- (2) 生体膜を介して行われる選択的輸送を行う膜タンパク質としてイオンポンプとイオンチャネルとがある。それらの違いについて説明せよ。
- (3) 真核生物には生体膜で囲まれた細胞内小器官が存在する。それらを3つ挙げ、その役割について簡潔に説明せよ。

生物 標準問題

タンパク質の分子間相互作用に関する以下の問いに答えよ。

【問 1】

タンパク質の中には、タンパク質分子どうしが集まって多量体を形成するものが多く存在する。同一のタンパク質が複数集まって多量体を形成している場合には、溶液中のタンパク質の分子量を測定することで、何分子が集合しているか（2量体、3量体、4量体など）の会合数を見積もることができる。分子量測定の代表的な実験手法はゲルろ過クロマトグラフィーである。ゲルろ過クロマトグラフィーによってタンパク質の分子量を見積もるには、具体的にどのような手順で実験を行えば良いか述べよ。

【問 2】

溶液中のタンパク質複合体の分子量を調べるためには、ゲルろ過クロマトグラフィー以外にどのような実験手法があるか、一つ挙げてその手法の原理を説明せよ。

【問 3】

DNA を切断する制限酵素のほとんどは2量体を形成するが、それにはどのような理由が考えられるか述べよ。

【問 4】

タンパク質の多量体形成は、タンパク質分子間の相互作用により生じる。タンパク質分子間の相互作用の種類には、ファンデルワールス力、水素結合、イオン結合、疎水性相互作用などがある。これらの相互作用の中から2つを選び、どのような相互作用かそれぞれ説明せよ。必要に応じて図を用いても良い。

【問 5】

細胞内には、異なる種類のタンパク質が集まった様々な多量体（複合体と呼ばれることが多い）が存在する。タンパク質 A とタンパク質 B が細胞内で同じ複合体の中に含まれることを示すためには、どのような実験をすれば良いか、考えられる実験の手順を具体的に説明せよ。実験の例は複数挙げて良い。

