

総合研究大学院大学高エネルギー加速器科学研究科

5年一貫制博士課程入学試験問題

専門科目

平成28年8月24日（水）13時00分～16時00分

注意

☆ 答案用紙の所定の欄に、受験番号、氏名を記入すること。

☆ 各自に計算用紙1枚が配布されていることを確認すること。

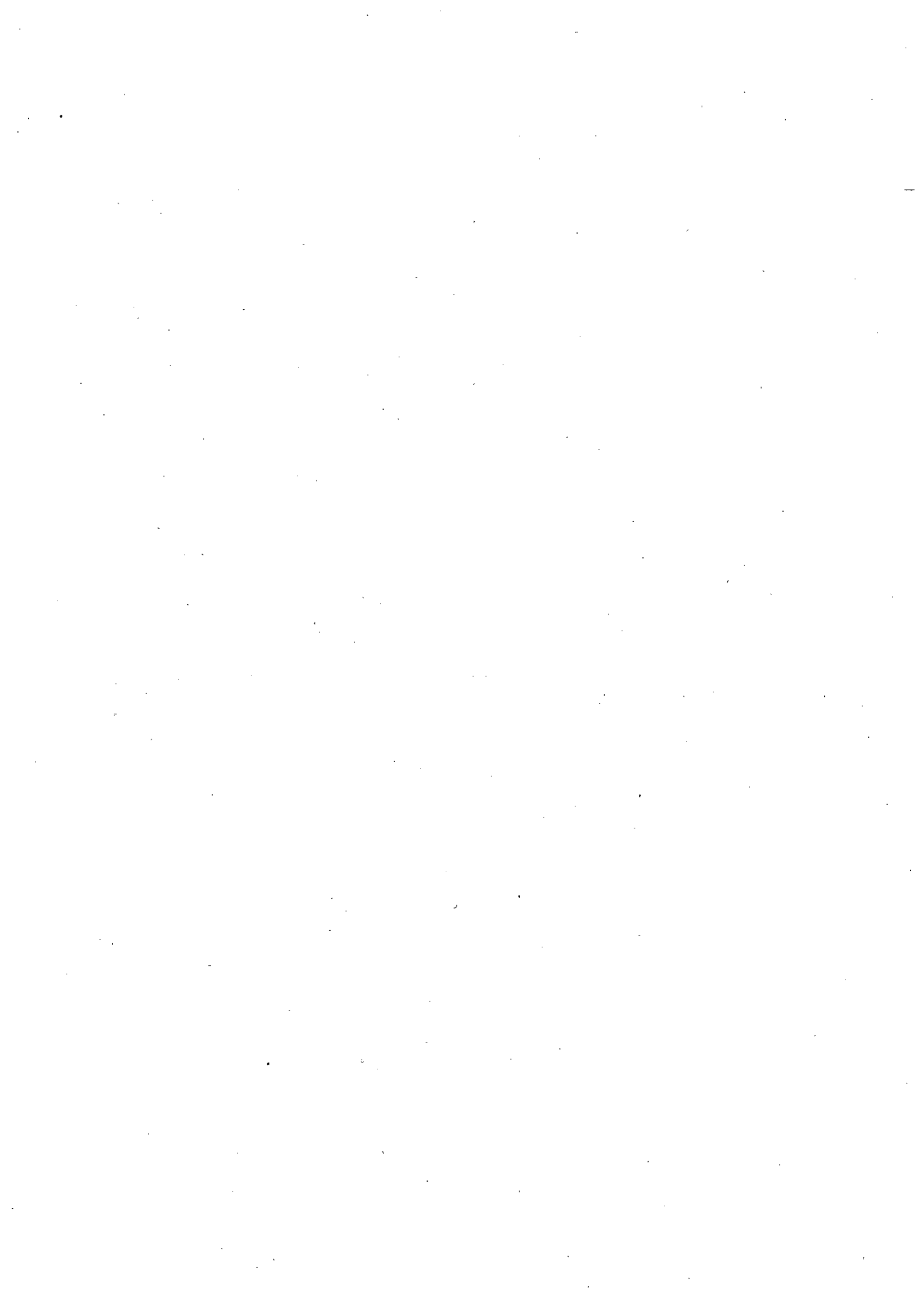
☆ 6問の中から、4問を選んで解答せよ。

ただし、素粒子原子核専攻理論部門を志望する（志望順位を問わず）受験者は第1問及び第2問を必ず選択しなければならない。

☆ 試験問題（4問）ごとに、異なった答案用紙を使用すること。

☆ 各問題に対して、答案用紙は複数使用してよいが、第〇〇問□□枚目というように、所定の欄に、選択した問題の番号及び答案用紙の順番を記入すること。解答できない場合も、受験番号、氏名、問題番号を記入し、提出すること。

☆ 答案用紙・計算用紙がさらに必要な場合は、挙手をして監督者に知らせること。



問題は次頁

第1問

【問1】

ハミルトニアン

$$H = H_0 + \lambda H'$$

において、 H_0 、 H' は時刻 t に陽に依存せず、 λ は十分に小さな実定数である。 H_0 のエネルギー固有状態 $|n\rangle$ とエネルギー固有値 ε_n が既知であり

$$H_0|n\rangle = \varepsilon_n|n\rangle$$

を満たす場合を考える。ただし、エネルギー固有状態 $|n\rangle$ は規格化されていて $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$ を満たし、縮退していないとする。このとき、以下の設問に答えよ。

- (1) ハミルトニアン H のエネルギー固有状態 $|\psi_n\rangle$ とエネルギー固有値 E_n は

$$H|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$$

を満たす。 λ が十分に小さいことから、 $|\psi_n\rangle$ と E_n を次のように λ のべきで展開する。

$$|\psi_n\rangle = |n\rangle + \lambda|\psi_n^{(1)}\rangle + \lambda^2|\psi_n^{(2)}\rangle + \dots$$

$$E_n = \varepsilon_n + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \dots$$

ただし、 $|\psi_n\rangle$ は規格化されているとする。このとき、 $E_n^{(1)}$ を H' と $|n\rangle$ を用いて表せ。

- (2) 次に、 $|\psi_n^{(1)}\rangle$ を H_0 のエネルギー固有状態を用いて

$$|\psi_n^{(1)}\rangle = c_n^{(1)}|n\rangle + \sum_{m \neq n} c_m^{(1)}|m\rangle$$

と表すとき、係数 $c_m^{(1)}$ (ただし $m \neq n$ とする) を求めよ。

- (3) $|\psi_n^{(1)}\rangle$ において、 $|n\rangle$ の係数 $c_n^{(1)}$ は一意に定まらない。 $|\psi_n\rangle$ が規格化されていることを用いて、 $c_n^{(1)}$ の満たすべき条件式を求めよ。

- (4) 演算子 O があるとき、期待値 $\langle \psi_n | O | \psi_n \rangle$ が λ の1次まで $c_n^{(1)}$ に依存しないことを示せ。

【問2】

水素原子型ポテンシャルにおける波動関数 $\psi(r, \theta, \phi)$ はシュレディンガー方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{C}{r} \right] \psi(r, \theta, \phi) = E \psi(r, \theta, \phi)$$

を満たす。ここで、 m は質量であり、 C は微細構造定数 α を用いて $C = \hbar c \alpha$ と表される。また、ラプラシアン Δ は極座標を用いて次のように表される。

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]$$

このとき、以下の設問に答えよ。

- (1) 基底状態の波動関数は

$$\psi(r, \theta, \phi) = A \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right)$$

という形をもつ。定数 a_0 と基底状態のエネルギー固有値を、それぞれ \hbar , m , C を用いて表せ。

- (2) さらに、基底状態の波動関数を規格化することで、係数 A を a_0 を用いて表せ。ただし、必要であれば以下の公式を用いてもよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz = \int_0^{\infty} dr \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin \theta$$

$$\int_0^{\infty} dx x^n \exp(-x/\rho) = \rho^{n+1} n!$$

ここで ρ は正の実数で n は自然数とする。

- (3) 上のシュレディンガー方程式に、次のように κ に比例する補正項を加える。

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{C}{r} - \frac{\kappa}{r} \exp\left(-\frac{r}{R}\right) \right] \psi(r, \theta, \phi) = E(\kappa) \psi(r, \theta, \phi)$$

ここで、 κ , R は実定数である。 κ が十分に小さいと仮定して、基底状態のエネルギー固有値 $E(\kappa)$ を κ の1次の次数まで求めよ。

第2問

【問1】

金属結晶の熱容量を考える。金属原子は平衡点の周りで振動していて、これを格子振動と呼ぶ。各原子の格子振動は互いに独立で、調和振動子のハミルトニアン H で記述されるとする。結晶は温度 T の熱平衡状態にあり、ボルツマン分布 $e^{-\beta H}$ に従うとする。ここで、 $\beta = 1/(kT)$ は逆温度、 k はボルツマン定数である。この系を古典統計力学で取扱い、以下の問いに答えよ。ただし、結晶中の金属原子の数を N 、換算プランク定数を \hbar とする。

- (1) まず、1原子の1方向の格子振動を考え、そのハミルトニアンを $H = p^2/2m + ax^2/2$ とおく。ここで、 p と x は金属原子の運動量と変位、 m は金属原子の質量、 a はばね定数である。このとき、運動エネルギーの平均値 $\langle p^2/2m \rangle$ とポテンシャルエネルギーの平均値 $\langle ax^2/2 \rangle$ を計算し、両者が一致することを示せ。ただし、ガウス積分は $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\pi/\alpha}$ で与えられる。
- (2) N 個の原子が3次元空間の各方向に振動することを考慮すると、系のハミルトニアンは $H = \sum_{i=1}^N \{ (p_{i,x}^2 + p_{i,y}^2 + p_{i,z}^2)/2m + a(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)/2 \}$ で与えられる。ここで i は原子を区別する添字である。このときの結晶のエネルギー平均値 $\langle E \rangle$ を計算し、熱容量 $C = \partial \langle E \rangle / \partial T$ が $3Nk$ で与えられることを示せ。

【問2】

低温では量子力学的効果が無視できない。結晶原子の格子振動を量子統計力学で取扱い、以下の問いに答えよ。

- (1) 3次元空間での調和振動子のエネルギー固有値は $(n_x + n_y + n_z + 3/2)\hbar\omega$ と離散化される。ここで、 n_x, n_y, n_z は非負の整数 $(0, 1, 2, \dots)$ 、 $\omega = \sqrt{a/m}$ である。このときの結晶のエネルギー平均値 $\langle E \rangle$ を求めよ。
- (2) 熱容量を求めよ。得られた表式は、高温極限 ($T \rightarrow \infty$) で、【問1】(2) で求めた古典論的値 $C = 3Nk$ に一致することを示せ。

【問3】

次に金属結晶中の伝導電子の寄与について考える。以下では簡単のため、伝導電子を換算質量 m_e の自由粒子として取扱い、1電子のハミルトニアンを $H = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m_e$ とおく。また、結晶は一辺の長さが L の立方体であり、結晶中の伝導電子の数を N_e とおく。

- (1) 古典統計力学で取扱い、伝導電子による熱容量への寄与を求めよ。

(2) 量子統計力学におけるフェルミ分布関数は

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon - \mu)/kT} + 1}$$

で与えられる。ただし、 ε と μ は、それぞれ、電子のエネルギーと化学ポテンシャルである。ゼロ温度 ($T = 0$)でのフェルミ分布関数は、図1の実線のような階段関数で与えられる。即ち、フェルミエネルギー μ_0 以下の状態のみが確率1で占有される。電子の質量 m_e と数密度 $n_e = N_e/L^3$ 、及び、換算プランク定数 \hbar を用いて μ_0 を書き表せ。ただし、電子はスピンの自由度だけ縮退していることに注意せよ。

(3) 低温 ($0 < T \ll \mu_0/(2k)$)では、フェルミ分布関数は図1の破線のように変化する。このとき、伝導電子の熱容量への寄与は、(1)の古典論的予想と比べて非常に小さくなる。その理由を考察せよ。ただし、分布関数は $|\varepsilon - \mu| \leq kT/2$ という限られた領域でのみ大きく変化することを仮定し、また、エネルギー空間での状態密度が

$$D(\varepsilon) = \frac{\sqrt{2}L^3 m_e^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \varepsilon^{1/2}$$

で与えられることを使ってもよい。

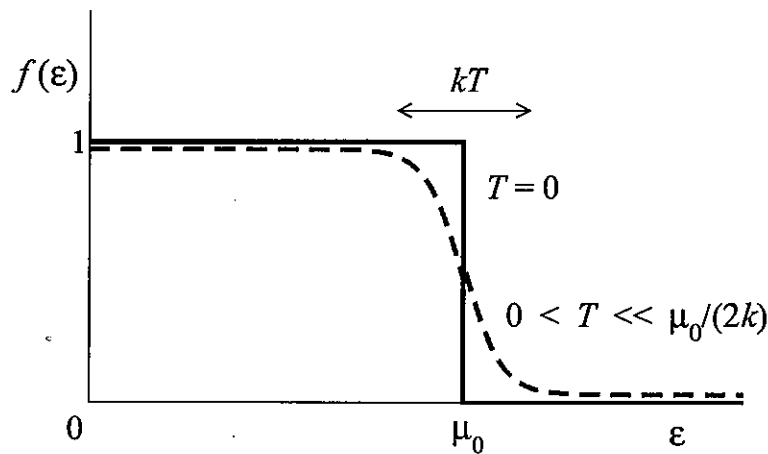


図 1: フェルミ分布関数

第3問

質量 m の質点に関する1次元の微小な振動を考える。そのポテンシャルエネルギーは、つり合いの位置からの座標のずれ x と正の定数 k を用いて、 $U = kx^2/2$ で与えられるものとする。外力が働かない安定な状態において、摩擦の影響の有無について考える。

【問1】

はじめに、摩擦の影響がない場合について考える。

- (1) ラグランジアン $L = T - U$ を書き下せ。ここで、 T は運動エネルギーである。 x の時間微分は \dot{x} と表記すること。

- (2) ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

を用いて、ニュートンの運動方程式

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

を導け。ここで、 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ とする。また、一般解が任意の実数の定数 A と a を用いて、 $x = A \cos(\omega_0 t + a)$ となることを示せ。

- (3) 全エネルギーを $E = T + U$ と定義すると、 E は時間に対して一定であることを示せ。

【問2】

次に摩擦力として速度 \dot{x} に比例した力 $f_T = -\alpha \dot{x}$ が働くものとする。ここで、 α は正の実数である。このときの運動方程式は次のように書くことができる。

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

ここで $2\lambda = \alpha/m$ とした。

- (1) 摩擦によるエネルギーの減衰率は振動数に比べて小さく、 $\lambda < \omega_0$ とする。任意の実数の定数 A と a を用いて、一般解が $x = Ae^{-\lambda t} \cos(\omega_a t + a)$ となることを示せ。ここで $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ であり、これは摩擦により振動数が ω_0 からずれることを意味する。

- (2) 1周期 $t_a = 2\pi/\omega_a$ の減衰率が非常に小さく、 $\lambda \ll \omega_a$ の場合について、ポテンシャルエネルギーの時間 t に対する依存性を調べたい。1周期 t_a の平均値 $\bar{U}(t)$,

$$\bar{U}(t) = \frac{1}{t_a} \int_t^{t+t_a} U(x(t')) dt' = \frac{1}{t_a} \int_t^{t+t_a} \frac{m\omega_0^2 x^2(t')}{2} dt'$$

を求めよ。ここで、 t から $t+t_a$ の間で滑らかな関数 $g(t)$ に対して、

$$\int_t^{t+t_a} e^{-2\lambda t'} g(t') dt' \approx e^{-2\lambda t} \int_t^{t+t_a} g(t') dt'$$

と近似すること。

- (3) $\lambda \ll \omega_a$ の場合について、運動エネルギー T の時間 t に対する依存性を調べたい。(2)と同様に1周期 t_a の平均をとり、

$$\bar{T}(t) = \frac{1}{t_a} \int_t^{t+t_a} T(\dot{x}(t')) dt'$$

と定義すると、 \bar{T} は \bar{U} と等しくなることを示せ。

- (4) 摩擦力 f_T による全エネルギーの時間変化を調べるために、散逸関数 $D = \alpha \dot{x}^2/2$ を導入する。同様に $\lambda \ll \omega_a$ の場合について、 D の1周期 t_a の平均値 \bar{D} を

$$\bar{D}(t) = \frac{1}{t_a} \int_t^{t+t_a} D(\dot{x}(t')) dt'$$

と定義すると、(2)と(3)で求めた \bar{U} と \bar{T} を用いて、

$$\frac{d}{dt}[\bar{U}(t) + \bar{T}(t)] = -2\bar{D}(t)$$

を満たすことを示せ。

- (5) 最後にラグランジュ方程式を用いて、全エネルギー E の時間変化を考える。摩擦力と散逸関数には $f_T = -\partial D/\partial \dot{x}$ という関係式が成り立ち、ラグランジュ方程式は外力 f_T が加わったときと同様に扱うことができる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = f_T$$

この摩擦力を含むラグランジュ方程式と一般化運動量 $p = \partial L/\partial \dot{x}$ を用いて、全エネルギー $E = p\dot{x} - L$ の時間微分が、

$$\frac{dE}{dt} = -2D$$

となることを示せ。これより、 D は全エネルギーの減衰率を表す量であることがわかる。

第 4 問

図 1 に示すように、 z 軸を中心とする円柱座標系 (r, θ, z) において、荷電粒子群（ビーム）が z 軸上を一定の速さ v ($0 < v < c$) で移動している場合の電磁場について考える。ビーム電荷は z 軸上のみ ($r=0$ の位置) に分布し、 r 方向の大きさはないものとする。

$r > R$ は完全導体で占められ、 $r \leq R$ は真空の軸対称な空間が z 方向に無限に続いている。以下の問 1, 2 (次ページ以降) に答えよ。説明・理由を求める設問に対しては、要点を示す記述 (図を含む) があればよい。

なお、解答においては破線枠内 (次ページ) の定義および関係式を利用してよい。また、単位は SI 単位系とする。

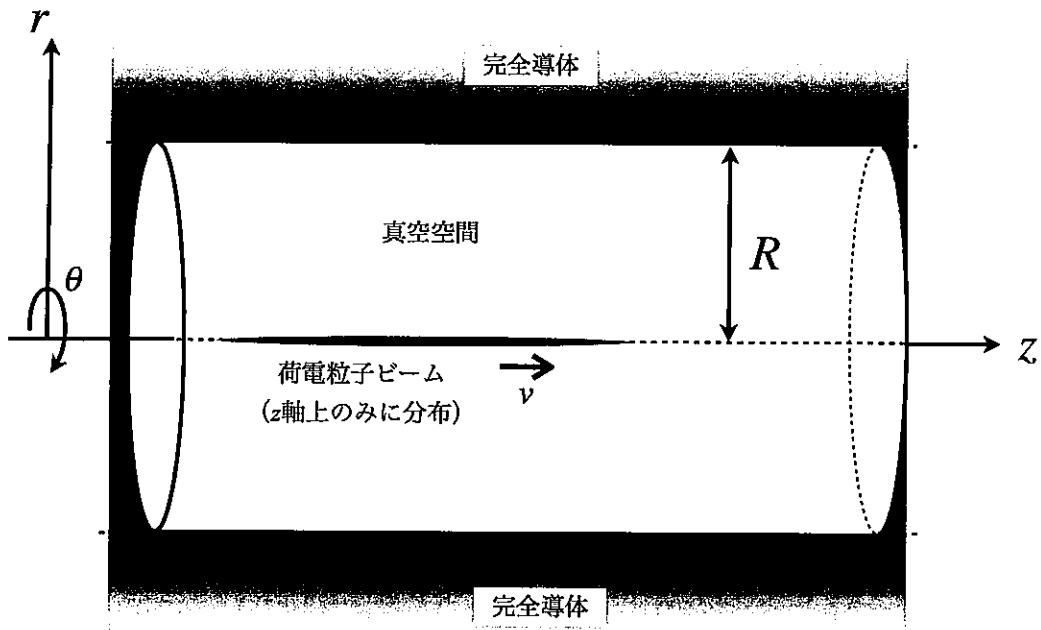


図 1 : 円柱座標系 (r, θ, z) の z 軸上を一定の速さ v で移動する荷電粒子ビーム。空間構造は軸対称で z 方向に無限に続き、電荷分布は z 軸上のみ (r 方向の大きさは無い)。

【記号の定義と関係】

\mathbf{E} : 電場, \mathbf{H} : 磁場, \mathbf{J} : 電流密度,

ϵ_0 : 真空の誘電率, μ_0 : 真空の透磁率, c : 光の速さ

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

真空中におけるマクスウェル方程式 (積分形)

$$(1) \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} \quad (2) \epsilon_0 \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho \cdot dV$$

$$(3) \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (4) \mu_0 \oiint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$\oint_C d\mathbf{s}$: 閉曲線 C に沿った線積分

V : 閉曲面 S が作る立体内側

$\oiint_S d\mathbf{S}$: 閉曲面 S に沿った面積分

ρ : 電荷密度

$\iint_S d\mathbf{S}$: 式(1), (3)で左辺の閉曲線 C を縁にした曲面 S に沿った面積分

【問1】

図1において, 電荷分布が z 軸上であれば電荷移動が作る電磁場は軸対称 (θ 方向に一樣) である. この場合, 各成分 $E_r, E_\theta, E_z, H_r, H_\theta, H_z$ のうち, $0 < r < R$ においては E_r, E_z, H_θ のみが生じる (E_θ, H_r, H_z は生じない). これについて以下の設問 (a) (b) (c) に答えよ.

- (a) 下記に示すビオ・サバールの法則を考慮し, 磁場成分は H_θ のみになる (H_r, H_z は生じない) ことを, 図を用いて説明せよ. ここでは $d\mathbf{I}$ (電荷の移動=電流) が軸上で z 軸方向のみであることを注意.

ビオ・サバールの法則

$$d\mathbf{H} = \frac{d\mathbf{I} \times \mathbf{r}}{4\pi |\mathbf{r}|^3} \quad \text{微小な電流素片 } d\mathbf{I} \text{ が, そこから } \mathbf{r} \text{ 離れた位置に作る微小磁場 } d\mathbf{H}$$

- (b) E_θ は0である理由を, 図を用いて説明せよ.
ヒント: マクスウェル方程式 (1) で H_z が0であることを利用する. ただし別の方法で説明してもよい.
- (c) 完全導体との境界 ($r=R$) では E_z も0になる. その理由を答えよ.

【問2】

図1において、ビームの電荷分布は密度 λ （単位長さ当たり）で z 方向に一様で無限に続いているとする（ビームは速さ v で移動）。この場合、図2に示すように電磁場は z 方向に一様となり、進行方向に垂直な成分 E_r, H_θ だけとなる。これについて次の設問(a)(b)(c)に答えよ。

- (a) 電磁場が軸対称で z 方向に一様ならば、電場の z 軸成分 E_z は0であることを説明せよ。

ヒント：式(1)で図2の破線の経路（境界面 $r=R$ を含む）積分を考える。ただし別の方法で説明してもよい。

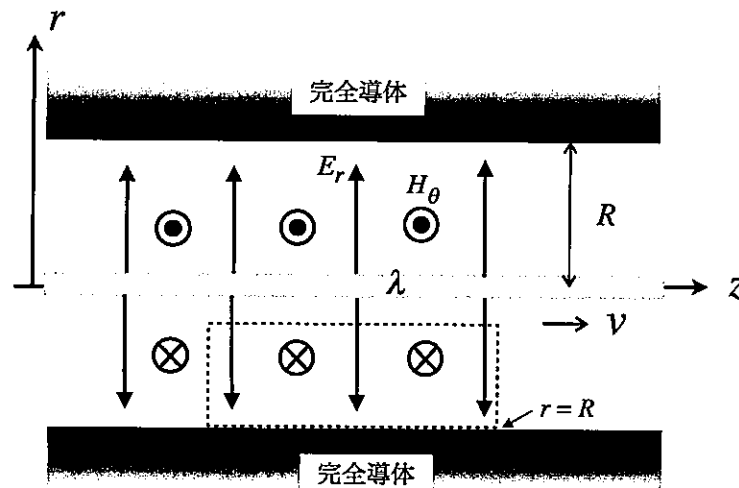


図2：ビームの電荷分布が一様な密度 λ （単位長さ当たり）で z 軸上を移動。

- (b) 位置 $r>0$ について、マクスウェル方程式(2)(3)を利用し、このビームによる電磁場 $E_r(r), H_\theta(r)$ を求めよ。また、その結果から $0<r\leq R$ における E_r と H_θ の比(E_r/H_θ)を求めよ。ここで電磁場は軸対称であることに注意せよ。
- (c) ビームの速さ v が光速($v\rightarrow c$)となる場合に、問2-(b)で求めた E_r/H_θ の値を求めよ。また、単位も極力単純にして示すこと。その際、 $c=3\times 10^8$ m/s, $\mu_0=4\pi\times 10^{-7}$ N/A²とし、円周率 π はそのまま π でよい。

第5問は次頁

第5問

水素原子は一つの陽子と一つの電子から成る最も軽い原子である。相対論的なディラック方程式によるとその量子力学的状態は主量子数 n と全角運動量 J で記述される。 J は電子の軌道角運動量 L とそのスピン $1/2$ により決定される。通常、原子の状態は、 nS_J , nP_J , nD_J などと記述される。ここで、 S , P , D は $L = 0, 1, 2$ に対応している。基底状態は $1S_{1/2}$ である。

ディラック方程式を解くと、状態のエネルギーは次式のように求められる。

$$E_{nJ} = E_n \left[1 + \left(\frac{\alpha}{n} \right)^2 \left(\frac{n}{J+1/2} - \frac{3}{4} \right) \right] \quad (1)$$

$$E_n = -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV (電子ボルト)}, \quad \alpha = \frac{1}{137}$$

式(1)からわかるように、同じ主量子数 n で異なる J をもつ状態間のエネルギーの違いは E_n に比べて微細 ($\sim 10^{-5}$) である。また、上式では L に対する依存性はない。

$n=2, n=3$ の水素原子のエネルギー準位は図1に示したように合計8個ある。また、 $n=3$ から $n=2$ への7個の遷移 ($\Delta L = \pm 1$) も矢印付きの下向きの垂線で示した。式(1)では表せないラムシフト (電磁場のゼロ点振動などの効果) による同じ主量子数 n で同じ J の状態間のエネルギー差も示した。

【問1】

量子力学によると、エネルギーは $E = h\nu$ と表される。ここで、 h はプランク定数 ($4.14 \times 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s}$)、 ν は周波数 (Hz) である。エネルギーをプランク定数で換算した周波数 (Hz) で表すこととし、有効数字3桁で答えよ。ラムシフトは無視して構わない。

(1-1) $n=3$ と $n=2$ の間のエネルギー差 ($\Delta E = E_3 - E_2$, $\nu = \Delta E/h$) を求めよ。

(1-2) 図1中の (a), (b), (c) で示した同じ主量子数 n で異なる J を持つ状態間のエネルギー差をそれぞれ求めよ。

【問2】

図2のように7個の遷移は線スペクトルで得られると期待されるが、これらは水素分子 H_2 の熱運動によるドップラー効果の影響を受ける。水素分子の速度を v とすると、線スペクトルの周波数 ν はドップラー効果により $\nu = \nu_0(1 \pm v/c)$ となる。ここで、 ν_0 は元の周波数で c は光速 ($3 \times 10^8 \text{ m/s}$) である。ここで、 ν_0 は問1の(1-1)で近似することにする。

(2-1) 水素分子の (熱) 運動エネルギーの平均値は気体運動論から $\langle Mv^2/2 \rangle = 3kT/2$ と評価される。ここで、 M は水素分子の質量で陽子質量 ($938 \text{ MeV}/c^2$) の2倍とする。 T は絶対温度で 363 K とし、 k はボルツマン定数 ($8.62 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$) である。これから平均速度 ($\sqrt{\langle v^2 \rangle}$) と光速で換算した速度 ($\sqrt{\langle v^2 \rangle}/c$) を有効数字2桁で求めよ。

(2-2) このドップラー効果によって線スペクトルがどのように影響されるかを図2の概形を解答用紙に書き写した上でそれに重ねて描け。ただし、水素分子の速度の広がり (2-1) で求めた平均速度と同程度と仮定せよ。

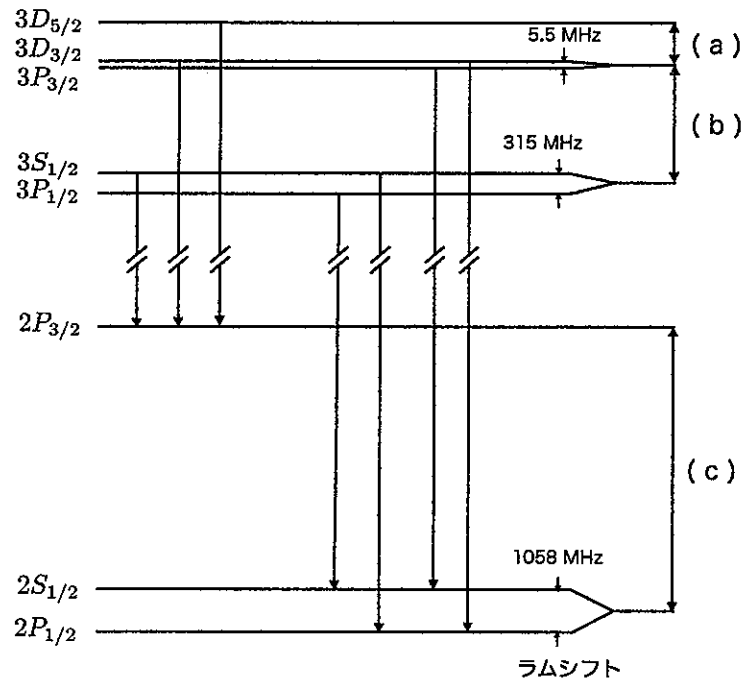


図 1: 水素原子のエネルギー準位: $n=2$ と $n=3$ の場合

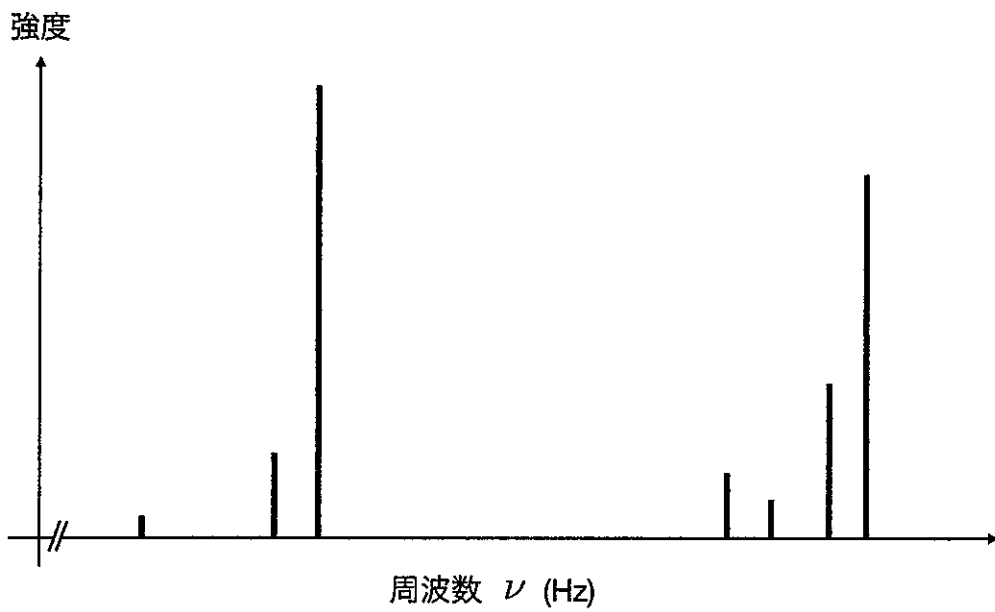


図 2: 水素原子の $n=3$ から $n=2$ への遷移の線スペクトル

【問3】

1970年代にレーザーが実用化され線スペクトルの研究に使用されるようになった。レーザーの周波数幅は30 MHz程度で水素原子の線スペクトルの幅と同程度である。もしドップラー効果を回避できれば、レーザーの周波数を調整することにより図2の線スペクトルに対応する遷移をそれぞれ選択的に引き起こすことができる。実際、図3のようなセットアップの実験が行われた。一つのレーザーをスプリッターS1で二つに分け、高強度のレーザー1で水素原子を励起状態に飽和させ、もう一方の低強度レーザー2で線スペクトルを探索するものである。あらかじめ、水素原子は放電で $n=2$ の最小エネルギー状態($2S_{1/2}$)になっている。また、それぞれのレーザーの強度は減衰器(非図示)で調整される。ともに同一周波数のレーザー1とレーザー2は水素ガス中をほぼ正面衝突するように 0.3° 程度で交差する。線スペクトルをスキャンするためにレーザーの周波数は ν_0 を中心に十分細かく変化させる。交差後のレーザー2の強度が周波数 ν の関数として光検出器で測定される。

(3-1) 測定結果を予想しながらこの実験でドップラー効果の影響をどのように回避しているのかを説明せよ。

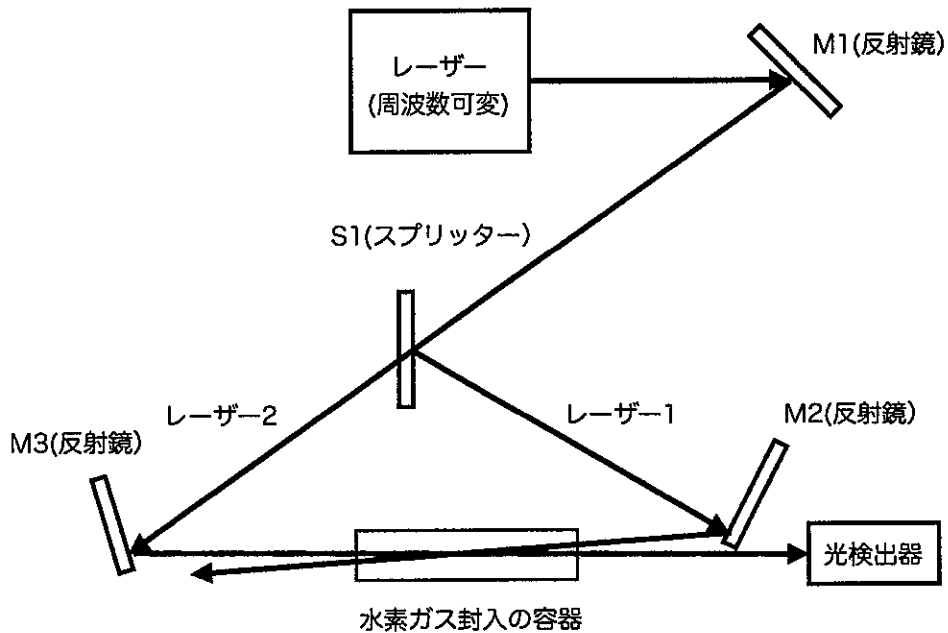


図 3: 実験セットアップの簡略図

第6問は次頁

第6問

複数の種類のイオンからなる混合イオンがある。イオンはすべて1価の陽イオンとする。これらをイオンの質量に応じて選別したい。イオン間に働くクーロン斥力や重力、地磁気等の影響は無視できるものとして、以下の設問に答えよ。

【問1】

図1のような装置を考える。混合イオンに隣接した押し出し電極に振幅 $V (> 0)$ のパルス電圧を印加することで各イオンを同時に加速し、接地されたグリッド電極を介してフライトチューブ内に射出する。チューブ内は電場や磁場が存在しない自由空間となっており、その長さを L とする。チューブの端にはイオン検出器が設置されており、チューブ内を飛行してきたイオンを電気信号として検出する。装置内は真空に保たれており、グリッド電極でのイオン損失はないものとする。

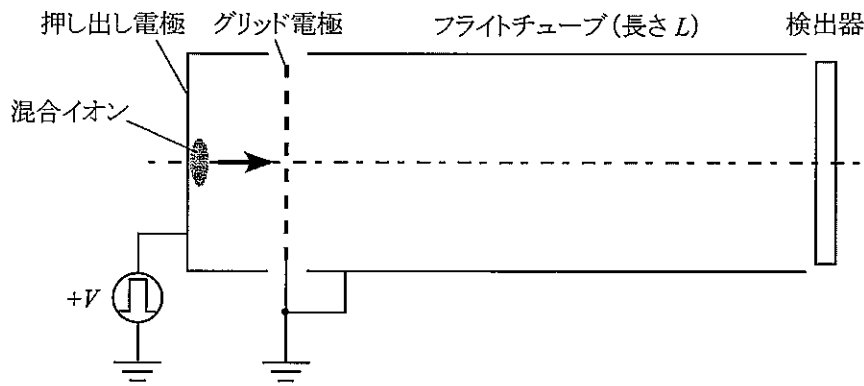


図1: 飛行時間型質量分析計の模式図。

- (1) イオンの質量を m 、電荷を e とするとき、グリッド電極から射出されるときイオンの速度 v_0 を求めよ。ただし、イオンの運動は非相対論的であり、初速度はゼロとする。
- (2) イオンがフライトチューブ内に射出されてから検出器に到達するまでの飛行時間 t が質量 m の平方根に比例することを示せ。
- (3) 誤差伝播の法則によると、互いに相関のない n 個の物理量 x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) から別の物理量 $y = f(x_i)$ を計算する場合、 y の統計誤差 σ_y は x_i の統計誤差 σ_{x_i} を用いて次式で与えられる。

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2$$

飛行時間 t の統計誤差を σ_t とするとき、質量 m の統計誤差 σ_m を求めよ。ただし、答えは m を含む形で表せ。

- (4) 実際の測定では、押し出し電極にパルス電圧を送ってからイオンの検出信号が現れるまでの時間を飛行時間として測定する。この場合、(2) で求めた本来の飛行時間 t に対してどのような誤差が生じると考えられるか、二つ以上述べよ。

【問2】

図1のフライトチューブと検出器の間に、電磁石を用いて紙面の裏から表に向かう一様な磁場を発生させ、図2のような配置とした。イオンは図中の点Oから電磁石の磁極間に垂直に入射され、速度に応じた偏向を受けて電磁石の側面に設置された検出器へと向かう。検出器の開口は十分幅の狭いスリットを取り付けることで小さく限定されている。磁極の端における効果は無視できるものとする。

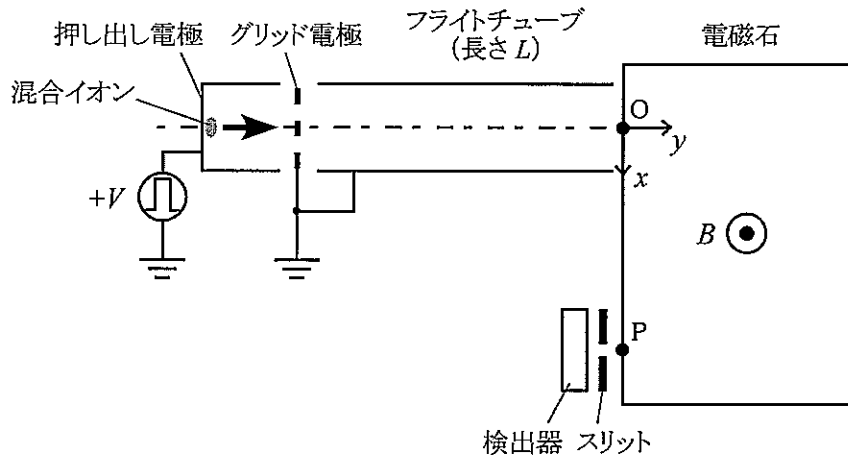


図2: 磁場偏向型質量分析計の模式図。

- (1) 磁極間に入射されたイオンは、一様な磁場から一定のローレンツ力を受けて等速円運動を行う。図中に示した点Oを原点とする (x, y) 座標において、磁極間におけるイオンの運動方程式を求めよ。磁極間の磁束密度は B 、イオンの速度は $v = (v_x, v_y)$ とする。
- (2) (1)で求めたイオンの運動方程式を解き、円運動の中心座標が $(\frac{v_0}{\omega}, 0)$ 、半径は $\frac{v_0}{\omega}$ となることを示せ。ただし、 $\omega = \frac{eB}{m}$ である。
- (3) 点Oから磁極間に入射されたイオンが 180° の偏向を受け、入射面と同じ面内にある点Pから出射される場合を考える。点Pの x 座標 x_P を求め、それが質量 m の平方根に比例することを示せ。
- (4) 前問で得られた関係式によると、一定の加速電圧 V の下で磁束密度 B を大きくしていけば、質量が小さいイオンから順に検出器の開口を通過することが分かる。今、 $V = 350 \text{ V}$ 、 $x_P = 20 \text{ cm}$ であるとする、 $B = 0.14 \text{ T}$ のときにあるイオンが検出された。イオンはすべて1価の陽イオンであることに注意し、検出されたイオンの質量数を計算せよ。また、その結果から推定されるイオンの候補を二つ以上挙げよ。ただし、電気素量は $1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ 、陽子または中性子の質量は $1.6 \times 10^{-27} \text{ kg}$ とする。

