

総合研究大学院大学高エネルギー加速器科学研究科  
5年一貫制博士課程入学試験問題

数 学

平成28年8月24日（水）9時30分～11時00分

注意

- ☆ 答案用紙の所定の欄に，受験番号，氏名を記入すること。
- ☆ 各自に計算用紙1枚が配布されていることを確認すること。
- ☆ 試験問題（4問）ごとに，異なった答案用紙を使用すること。
- ☆ 各問題に対して，答案用紙は複数使用してよいが，第〇〇問□□  
枚目というように，所定の欄に，選択した問題の番号及び答案用  
紙の順番を記入すること。  
解答できない場合も，受験番号，氏名，問題番号を記入し，提出  
すること。
- ☆ 答案用紙・計算用紙がさらに必要な場合は，挙手をして監督者に  
知らせること。



問題は次頁

第1問

実数  $\alpha, \beta$  に対して行列  $A$  を

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta & \alpha - \beta \\ 2\alpha - 2\beta & \alpha + 2\beta \end{pmatrix}$$

とするとき、次の問いに答えよ。

【問1】  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  は  $A$  の2つの固有ベクトルであることを示せ。またそれらに対

応する固有値を求めよ。

【問2】  $n$  を負でない整数として

$$A^n \begin{pmatrix} -3 \\ 18 \end{pmatrix} = a_n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b_n \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

とするとき、 $a_n, b_n$  を  $\alpha, \beta, n$  を用いて表せ。

第2問

【問1】  $n$  を自然数として  $I_n = \int_0^{\infty} dx e^{-x} x^n$  するとき,  $I_{n+1}$  と  $I_n$  との関係式を求めよ.

またそれを用いて  $I_n$  を求めよ.

【問2】  $\int_0^{\infty} dx e^{-x} x^{\frac{1}{2}}$  の値を求めよ. ただし, 必要なら  $\int_0^{\infty} dt e^{-t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  を用いよ.

第3問

【問1】  $z$  の関数

$$f(z) = \cos 2\pi z$$

を  $z = \frac{1}{2}$  の周りで  $(z - \frac{1}{2})^3$  の項までテイラー展開せよ.

【問2】 複素積分

$$\oint_{|z|=1} dz \frac{\cos 2\pi z}{(z - \frac{1}{2})^4}$$

の値を留数定理を使って求めよ. ただし, 積分路は複素平面上の原点を中心とする単位円周上を反時計回りに一周するものとする.

第4問

$y$  の  $x$  に関する微分方程式  $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$  について次の問いに答えよ.

【問1】  $z = \frac{y}{x}$  のとき, 変数変換により  $z$  の  $x$  に関する微分方程式を導け.

【問2】【問1】の微分方程式を解いて, 与えられた  $y$  の微分方程式の一般解を求めよ.

