

総合研究大学院大学高エネルギー加速器科学研究科

5年一貫制博士課程入学試験問題

物 理

平成24年8月29日（水）13時00分～16時00分

注意

☆ 答案用紙の所定の欄に、受験番号、氏名を記入すること。

☆ 各自に計算用紙1枚が配布されていることを確認すること。

☆ 7問の中から、4問を選んで解答せよ。

ただし、素粒子原子核専攻理論部門を志望する（志望順位を問わず）受験者は第1問及び第2問を必ず選択しなければならない。

☆ 試験問題（4問）ごとに、異なった答案用紙を使用すること。

☆ 各問題に対して、答案用紙は複数使用してよいが、第〇〇問□□枚目というように、所定の欄に、選択した問題の番号及び答案用紙の順番を記入すること。解答できない場合も、受験番号、氏名、問題番号を記入し、提出すること。

☆ 答案用紙・計算用紙がさらに必要な場合は、挙手をして監督者に知らせること。

第1問

【問1】

空間座標を $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ 運動量を $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ とすると、角運動量演算子 $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ について交換関係

$$[L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k,$$

$$[L^2, L_i] = 0,$$

$$[L_3, x_1] = i\hbar x_2, [L_3, x_2] = -i\hbar x_1$$

が成り立つことを示せ。ここで、添字の i, j, k は $1, 2, 3$ の値をとり、 ϵ_{ijk} は $\epsilon_{123} = 1$ とする完全反対称テンソルである。

【問2】

極座標表示 (r, θ, ϕ) で L_3 をあらわすと

$$L_3 = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi},$$

となることを示せ。ただし、 $x_1 = r \sin \theta \cos \phi$, $x_2 = r \sin \theta \sin \phi$, $x_3 = r \cos \theta$ とする。

【問3】

(1) 波動関数 $\psi(x_1, x_2, x_3)$ と角運動量演算子 \mathbf{L} について

$$\psi(x'_1, x'_2, x'_3) = \exp\left(i\frac{\alpha}{\hbar} L_3\right) \psi(x_1, x_2, x_3)$$

としたとき x'_i を x_i であらわせ。 (i は $1, 2, 3$ の値をとる。)

(2) (1) から L_3 の固有値が $\hbar m$ (m は整数) であることを示せ。

【問 4】

中心力ポテンシャル $V(r)$ に束縛された質量 M の質点のみたす時間に依存しないシュレディンガー方程式は、ハミルトニアン固有値を E 、波動関数を ψ として

$$E\psi(r, \theta, \phi) = \left(-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta + V(r) \right) \psi(r, \theta, \phi)$$

である。波動関数は $\psi(r, \theta, \phi) = R_l(r)Y_l^m(\theta, \phi)$ と変数分離することができる。ここで Y_l^m は $L^2 Y_l^m = \hbar^2 l(l+1)Y_l^m$, $L_3 Y_l^m = \hbar m Y_l^m$ を満たす球面調和関数である。このとき動径波動関数 $R_l(r)$ の満たす固有値方程式は

$$ER_l = -\frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{d^2 R_l}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR_l}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} R_l \right) + V(r)R_l$$

である。 $V(r) = 0$ ($r < a$), $V(r) = \infty$ ($r > a$) の場合について、以下の問いに答えよ。

- (1) 波動関数の満たすべき境界条件はなにか。また、 $l \neq 0$ の時、 $r = 0$ 付近で $R_l(r)$ は r の何次の冪となるか示せ。
- (2) $l = 0$ の場合に $F(r) \equiv rR_0(r)$ の満たす微分方程式を求めよ。波動関数のエネルギー固有値をもっとも小さいものから順に E_0, E_1, \dots とした時に E_0, E_1 を求め、その波動関数を図示せよ。

第2問

互いに相互作用のないボース粒子からなる系を考える。以下の問いに答えよ。

【問1】

温度 T 、化学ポテンシャル μ をもつ熱浴に接した系の大分配関数は、

$$\Xi = \sum_{\{n_i\}} \prod_i \exp\left[-\frac{n_i(\varepsilon_i - \mu)}{k_B T}\right]$$

で与えられる。ただし、 i は系のエネルギー固有状態を区別し、 ε_i はその固有状態のエネルギー、 n_i はその状態を占める粒子数を表す。 $\{n_i\}$ に関する和は、すべての状態 i における可能な粒子数 n_i すべてについて取るものとする。 k_B はボルツマン定数である。このとき、あるエネルギー ε_k をもつ状態を占める平均粒子数は

$$f(\varepsilon_k) = \frac{1}{\exp[(\varepsilon_k - \mu)/(k_B T)] - 1}$$

となることを示せ。また、 $f(\varepsilon)$ を図示せよ。

【問2】

非常に多くの粒子 (N 個) を、3次元の調和振動子型ポテンシャルに閉じ込めると、1粒子の取りうるエネルギーは

$$\varepsilon = \hbar\omega(n_x + n_y + n_z)$$

で与えられる。ただし、 n_x, n_y, n_z はゼロまたは正の整数である。ゼロ点振動のエネルギー

$\frac{3}{2}\hbar\omega$ は除いて考えることにした。このとき、あるエネルギー ε よりも小さいエネルギーを

もつ状態の数 $G(\varepsilon)$ を求め、状態密度 $g(\varepsilon)$ は

$$g(\varepsilon) = \frac{dG(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{\varepsilon^2}{2\hbar^3\omega^3}$$

となることを示せ。ただし、 $\varepsilon \gg \hbar\omega$ として和を積分に置き換えてもよい。

【問3】

上記で $\varepsilon \gg \hbar\omega$ を満たさない基底状態 $\varepsilon = 0$ を特別に扱い、系の全粒子数 N を基底状態の

粒子数 N_0 とそれ以外 $N_{>0}$ に分けて, $N=N_0+N_{>0}$ と書こう. N_0 と $N_{>0}$ の平均値を μ , $k_B T$ および $\hbar\omega$ の関数としてそれぞれ表せ. ただし, 積分の近似式 $\int_0^{\infty} dx \frac{x^2}{z^{-1}e^x - 1} \cong 2.4z$ を使ってもよい.

【問4】

N を与えれば μ が定まる. $k_B T \gg \hbar\omega$ のとき, μ を決める式を導け.

【問5】

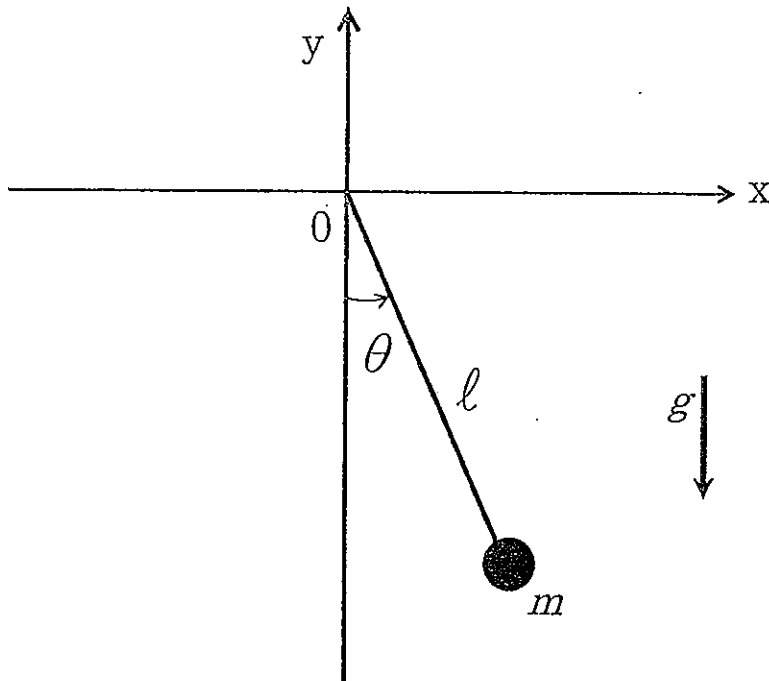
温度がある値よりも小さくなると, 基底状態に多くの粒子が集まり始める. これをボース・アインシュタイン凝縮と呼ぶ. ボース・アインシュタイン凝縮が起こる臨界温度 T_c を, $\hbar\omega$ と N および k_B の関数として求めよ.

【問6】

基底状態に集まる粒子数 N_0 の全粒子に対する割合 N_0/N はどうなるか. T/T_c の関数として求め, 図示せよ.

第3問

長さ l のひもに質量 m の質点がついた振り子が、 x - y 平面内を振動している。図のように振り子の振れ角を θ とする ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$)。重力加速度を g として以下の問に答えよ。ただし、ひもの重さは無視できるものとする。



【問1】

この系のラグランジアン $L(\theta, \dot{\theta}) = T - U$ を求めよ ($\dot{\theta}$ は θ の時間微分である)。ただし T は系の運動エネルギー、 U は位置エネルギーである。 $y=0$ での位置エネルギーを0とする。

【問2】

質点の運動方程式を導出せよ。

【問3】

θ の最大値を θ_0 としたときのエネルギー保存則を書け。

【問4】

この振り子の周期 τ を下記の関係式を用いて級数の形であらわせ。

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\pi}{2} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 k^{2n} \right),$$

$$(2n)!! = 2n(2n-2) \cdots 4 \cdot 2$$

$$(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3) \cdots 3 \cdot 1$$

【問5】

振り子が微小振動 ($\theta_0 \ll 1$) しているとき、 τ はいくらになるか。 θ_0 の2次の項まで求めよ。

第4問

真空中において、電流が作る静磁場を以下の各々の場合について考える。真空中の透磁率は μ_0 とする。

【問1】

xy 平面上の原点を中心に半径 a の輪が置かれている。この輪に図1のように電流 I が流れているとき、z 軸上の点 A での磁束密度 $\vec{B}(z)$ は

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z} \quad \text{となることを示せ。}$$

\hat{z} は z 軸方向の単位ベクトルである。

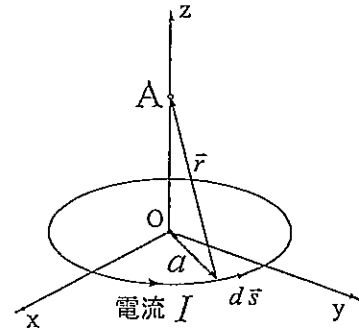


図1：円電流の配置

ビオ・サバルの式 $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$ を用いてもよい。 $d\vec{B}$ は微小な長さの電流要素 $I d\vec{s}$ によって \vec{r} だけ離れた位置に作られる微小な磁束密度であり、 $\hat{r} \equiv \vec{r}/r, r \equiv |\vec{r}|$ である。

【問2】

ソレノイドが作る磁束密度を考える。ソレノイドは導線をらせん状に巻いたものである。ここでは、ソレノイドは円電流の重ね合わせと考え、図2に示すように、半径 R 、電流 I の円電流が N 個あり、その長さを L とする。ソレノイドの中心を原点として、ソレノイドの中心軸を z 軸とする。以下の設問に答えよ。

図2に示す円柱座標 (ρ, ϕ, z) では、任意のベクトル $\vec{A} = (A_\rho, A_\phi, A_z)$ について、以下の関係式が成り立つことを用いてもよい。

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \hat{\rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) + \hat{\phi} \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \hat{z} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right)$$

$\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z}$ はそれぞれ ρ, ϕ, z 方向の単位ベクトルである。

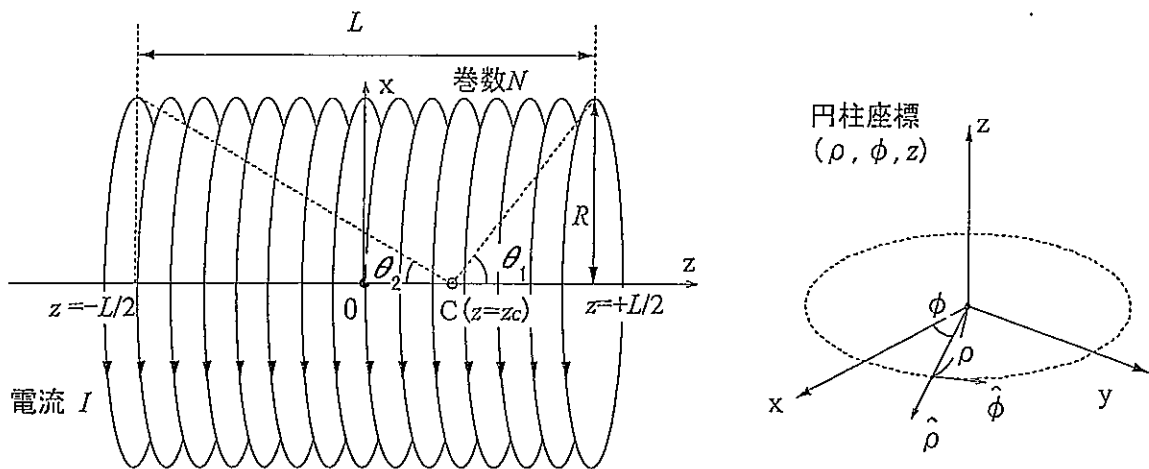


図2：ソレノイドの模式図（左図）と円柱座標の定義（右図）

(1)ソレノイドの内外の磁力線を向きも含めて、図3を参考にして図示せよ。

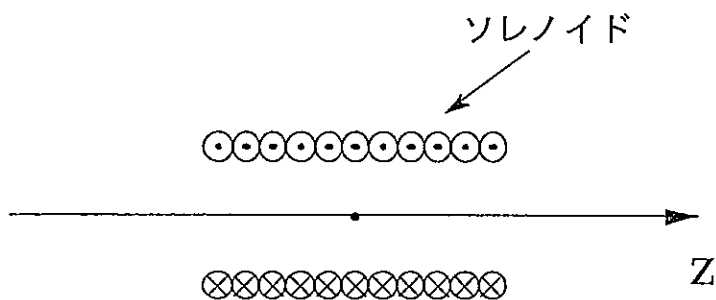


図3：ソレノイド断面図

(2)円柱座標 (ρ, ϕ, z) で、 ϕ 方向の磁束密度を考える。ソレノイド内部では電荷、電流（変位電流も含む）が無く、磁束密度 \vec{B} は $\nabla \times \vec{B} = \vec{0}$ を満たす。また磁束密度は z 軸について軸対称な場となる。このとき、ソレノイド内部の ϕ 方向の磁束密度が存在しないことを示せ。

(3)次に z 軸上の点 $C(z = z_c)$ での磁束密度 $\vec{B}(z_c)$ を求める。巻数 N が十分多く、図2のように点 C からソレノイドの端までの見込角をそれぞれ θ_1 、 θ_2 とするとき、

$$\vec{B}(z_c) = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \hat{z}$$

であることを示せ。ここで、 $\tan \theta_1 = \frac{R}{L/2 - z_c}$ 、 $\tan \theta_2 = \frac{R}{L/2 + z_c}$ であり、 $n = N/L$ である。

(4) ソレノイド内部では(2)より, ρ 成分 $B_\rho(\rho, z)$, z 成分 $B_z(\rho, z)$ のみが存在する. z 軸上の磁束密度を $B_z(0, z) \equiv f(z)$ と定義する. z 軸近傍($\rho \ll R$)にて, $\frac{\partial B_z(\rho, z)}{\partial z} \approx \frac{\partial B_z(0, z)}{\partial z}$ と近似するとき, ρ に関して2次まで展開すると $B_\rho(\rho, z)$, $B_z(\rho, z)$ は,

$$B_\rho(\rho, z) = -\left(\frac{\rho}{2}\right) \frac{\partial f(z)}{\partial z}$$

$$B_z(\rho, z) = f(z) - \left(\frac{\rho^2}{4}\right) \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2}$$

と書けることを示せ. (ヒント: まず $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ から $B_\rho(\rho, z)$ を求めよ.)

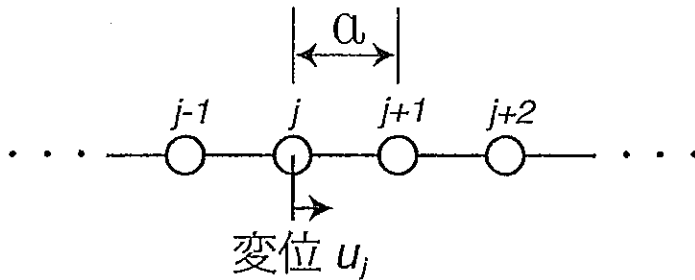
(5) z 軸近傍($\rho \ll R$)で, ソレノイドの端部と中心の磁束密度を比較してみる. 但し, 簡単のため $R \ll L$ のときのみを考える. (3), (4)の結果を用いて, $z = \pm L/2$ の場所での磁束密度 $B_\rho(\rho, \pm L/2)$, $B_z(\rho, \pm L/2)$ を求めよ. 同様に $z = 0$ での磁束密度 $B_\rho(\rho, 0)$, $B_z(\rho, 0)$ を求めよ.

第5問

【問1】

図のような1次元的に多数の原子が並んだ長い分子の1次元軸上に制限された調和振動について考えてみよう。質量 M の原子が等間隔 a で並んでいる場合に、原子間の結合の弾性定数を K 、左端から数えて j 番目の原子の平衡位置からの変位を u_j とし、古典的振動の角振動数 ω_q を波数 q の関数として求めよ。なお、振動が N 原子周期であるという周期的境界条件 ($u_j = u_{j+N}$) を用いよ。また、 N は偶数とする。

[ヒント: $u_j = A_q e^{iqja - i\omega_q t}$ を用いてもよい。ここで、 t は時間、 A_q は振動の振幅であり、また、 i は虚数単位である.]



【問2】

問1の結果を第1ブリルアン帯 ($-\frac{\pi}{a} \leq q < \frac{\pi}{a}$) の中で図示せよ。

【問3】

問2と同じ領域で波数 q の取り得る値を求めよ。

【問4】

この系の波の伝わる速度(音速)を $qa \ll 1$ として求めよ。

【問5】原子間の結合が交互に強い結合と弱い結合であるとする。強い結合と弱い結合の弾性定数をそれぞれ K_1, K_2 ($K_1 > K_2$) とする。この場合の角振動数 ω_q の波数 q 依存性を求めよ。

[ヒント: B_q, C_q を振動の振幅として、 $u_j = (B_q e^{iqja} + C_q e^{i(q+\frac{\pi}{a})ja}) e^{-i\omega_q t}$ を用いてもよい.]

第6問

【問1】

原子炉で発生する運動量 p をもつ第一世代の反ニュートリノ ($\bar{\nu}_e$) が第三世代の反ニュートリノ ($\bar{\nu}_\tau$) に遷移する現象に注目する。(第一世代と第三世代間のニュートリノ振動についてのみ考えるので、以下の議論では第二世代のことは無視する。) 観測される反ニュートリノの状態 ($|\bar{\nu}_e\rangle$, $|\bar{\nu}_\tau\rangle$) は、質量の固有状態 $|\bar{\nu}_1\rangle$, $|\bar{\nu}_3\rangle$ と混合角 θ を用いて以下のように表せる。

$$\begin{aligned} |\bar{\nu}_e\rangle &= \cos\theta|\bar{\nu}_1\rangle + \sin\theta|\bar{\nu}_3\rangle \\ |\bar{\nu}_\tau\rangle &= -\sin\theta|\bar{\nu}_1\rangle + \cos\theta|\bar{\nu}_3\rangle \end{aligned}$$

ここで、 $|\bar{\nu}_j\rangle$ ($j = 1, 3$) はエネルギー $E_j = \sqrt{(pc)^2 + (m_j c^2)^2}$ をもち、その時間発展は

$$|\bar{\nu}_j(t)\rangle = e^{-iE_j t/\hbar} |\bar{\nu}_j(0)\rangle$$

と記述される。 m_j はそれぞれの固有状態の質量である。また、 c は光速、 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ (h はプランク定数) である。

原子炉で発生した反ニュートリノの時刻 t での状態を $|\bar{\nu}(t)\rangle$ と表記する。質量 m_1 と m_3 が異なるため、 $t = 0$ で $|\bar{\nu}_e\rangle$ であったものが、ある確率で $|\bar{\nu}_\tau\rangle$ に遷移している。その遷移確率 $P(\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\tau) = |\langle \bar{\nu}_\tau | \bar{\nu}(t) \rangle|^2$ は

$$P(\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\tau) = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \cdot \left[1 - \cos\left(\frac{(E_1 - E_3)t}{\hbar}\right) \right] \dots \text{[式1]},$$

となる。ここで、 $m_j c^2 \ll pc$ と近似すると、

$$P(\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\tau) = \sin^2 2\theta \cdot \sin^2\left(\frac{\Delta m^2 c^2 L}{4p\hbar}\right) \dots \text{[式2]},$$

と書ける。ここで、 $\Delta m^2 = |m_1^2 - m_3^2|$, $L = ct$ は反ニュートリノの発生点から測定点までの距離である。(反ニュートリノの質量は小さいのでその速度は光速と仮定してよい。)

Δm^2 , L , p は、それぞれ $(\text{eV})^2/c^4$, m , MeV/c という単位で表すとき、 $\hbar c = 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$ という関係を使うと、

$$P(\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\tau) = \sin^2 2\theta \cdot \sin^2\left(\frac{1.27 \Delta m^2 L}{p}\right) \dots \text{[式3]},$$

と書ける(有効数字3桁で表記)。ここで、 $\text{MeV} = 10^6 \text{ eV}$, $\text{fm} = 10^{-15} \text{ m}$ である。

(1) 式1, 2, 3を導け。

(2) これまでの実験によって、 $\Delta m^2 = 2.3 \times 10^{-3} (\text{eV})^2/c^4$ であると知られている。原子炉で発生する反ニュートリノを用いて θ を測定する場合、その遷移確率が最大となる距離に検出器を設置することが望ましい。その距離はどの程度か。有効数字2桁で答えよ。原子炉で発生する反ニュートリノの運動量は $3.0 \text{ MeV}/c$ と仮定する。

【問2】

ニュートリノは検出器内で反応し、電子などの荷電粒子が反跳される。この反跳された電子の運動エネルギーからニュートリノのエネルギーが推定できる。シンチレーターと呼ばれる物質は電子の運動エネルギーに比例した量の光を発生する。実験者は光検出器を使って、その光の量を電気信号として測定する。

ニュートリノのエネルギーを知るためには、電気信号と運動エネルギーの関係を調べねばならない（これをキャリブレーションと呼ぶ）。反応率の小さいニュートリノのかわりに、放射線源が発生するガンマ(γ)線を使ってこれをおこなう。図1に示すように、コンプトン散乱を考える。

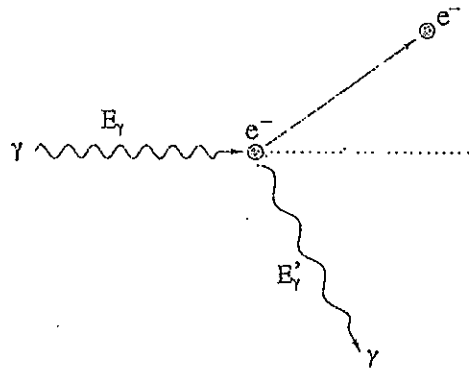


図1: コンプトン散乱

(1) シンチレーターは紫色の可視光を発生する。その波長を 400 nm とすると、エネルギーは何 eV となるか。有効数字 2 桁で答えよ。 $\hbar c = \frac{hc}{2\pi} = 197 \text{ MeV}\cdot\text{fm}$ (h はプランク定数) という関係式を用いてよい。

(2) 電子の運動エネルギーは反跳される角度に依存する。エネルギー (E_γ) をもつガンマ線によって反跳される電子の運動エネルギー (T) の最大値を表す式を導け。ここで電子の質量は m とおけ。 ^{137}Cs (セシウム 137) 線源から発生される γ 線のエネルギーは 0.66 MeV である。この線源を使った場合、電子の運動エネルギーの最大値は何 MeV となるか。有効数字 2 桁で答えよ。電子の質量を $0.51 \text{ MeV}/c^2$ として計算せよ。

(3) 反跳電子の最大運動エネルギーが 0.50 MeV, 1.0 MeV, 1.5 MeV となるような 3 種類の γ 線を用いて測定した結果、対応する検出器の信号強度はそれぞれ、1.4 mV, 2.1 mV, 2.5 mV となった。信号強度 (y とおく) と反跳電子の最大運動エネルギー (x とおく) の関係が線形であると仮定して、 $y = a + bx$ の関係を表す係数 a, b の値を最小二乗法を使って求めよ。ただし、信号強度の誤差は一定値とする。有効数字 2 桁で答えよ。

第7問

波長 500 nm で、光出力が 10 mW の点光源がある。ここから光は等方的に放射されているとする。以下の設問に答えよ。必要ならば、プランク定数として $h = 6.6 \times 10^{-34}$ J s, 光速として $c = 3.0 \times 10^8$ m/s を使用し、特に指示がない限り有効数字 2 桁で答えること。

【問1】

この光源から単位時間（1 秒間）に出てくる全光子数を求めよ。

【問2】

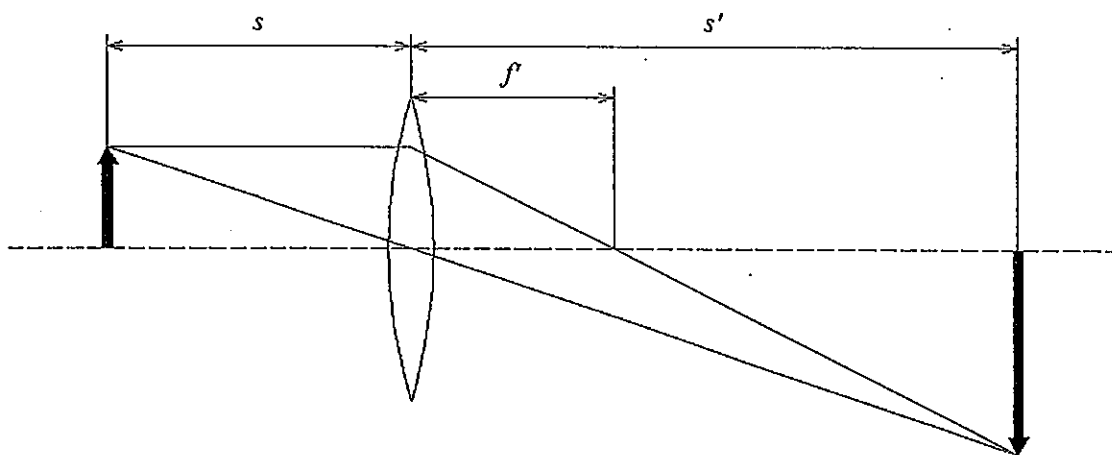
光源から 1.0 m 離れた場所に半径 1.0 mm の円形の受光部を持つ検出器を光子を最大限受光できるように置く。全ての放射されている光子数に対してこの検出器が毎秒受け取る光子数の割合を求めよ。

【問3】

問2と同じ配置で光源と検出器との間に半径 50 mm, 焦点距離 200 mm の凸レンズを入れて検出器上に集光し結像させ、検出器が受ける光子数を最大にしたい。レンズの反射, 収差, レンズ内や光路中での減光は無視できるとする。

- (1) レンズを光源から何 mm のところに置くのがよいか求めよ。
- (2) このとき, 集光しなかったときと比べ, 光子数がおおよそ何倍に増えるか有効数字 1 桁で求めよ。

なお, 下図のように, 物体とレンズ, レンズと像との距離をそれぞれ s , s' , レンズの焦点距離を f' とすると, $\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$ と表せることを用いてもよい。



【問4】

光源から 1.0 m のところに半径 1.0 mm の受光部分を持つ光電子増倍管を置き、光電子増倍管で光子数を計測する(レンズによる集光は行わない)。光源と測定器の間に減光フィルターを入れることにより大幅に減光し、10 分間光子数を計測したところ、 6.0×10^4 個であった。

(1) 減光フィルターにより光子数が何分の 1 になったか求めよ。光電子増倍管自体のバックグラウンドおよび数え落としは無視できるとする。

(2) 観測された光子数の単位時間(1 秒間)の計数率とその誤差はいくらになるかを求めたい。測定された光子数を N 、その統計誤差を $\Delta N (= \sqrt{N})$ 、測定時間を T 、その統計誤差を ΔT とするときの計数率を求め、誤差の伝搬式を誤差の 1 次の項まで求めよ。

(3) 時間計測の統計誤差が 1.0% であるとき、今回の測定での計数率とその誤差を求めよ。