

総合研究大学院大学高エネルギー加速器科学研究科

5年一貫制博士課程入学試験問題

物 理

平成22年8月31日（火）13時00分～16時00分

注意

- ☆ 答案用紙の所定の欄に、受験番号、氏名を記入すること。
- ☆ 各自に計算用紙1枚が配布されていることを確認すること。
- ☆ 6問の中から、4問を選んで解答せよ。  
  
ただし、素粒子原子核専攻理論部門（含む宇宙理論）を志望する  
（志望順位を問わず）受験者は第1問及び第2問を必ず選択しな  
ければならない。
- ☆ 試験問題（4問）ごとに、異なった答案用紙を使用すること。
- ☆ 各問題に対して、答案用紙は複数使用してよいが、第〇〇問□□  
  
枚目というように、所定の欄に、選択した問題の番号及び答案用  
  
紙の順番を記入すること。解答できない場合も、受験番号、氏名、  
  
問題番号を記入し、提出すること。
- ☆ 解答用紙・計算用紙がさらに必要な場合は、挙手をして監督者に  
  
知らせること。

第1問

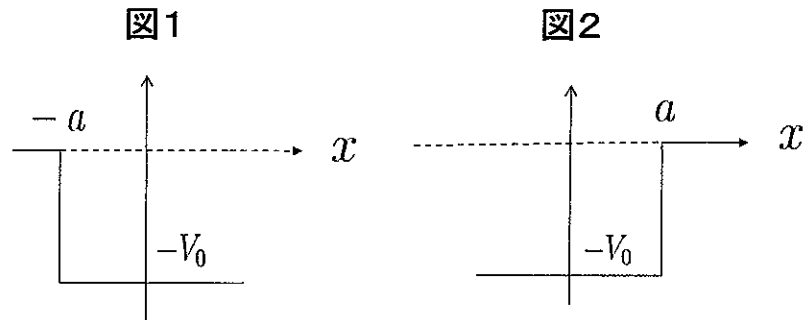
【問1】ポテンシャル  $V(x)$  の中を運動している質量  $m$  の粒子の波動関数  $\Psi(x, t)$  に対するシュレーディンガー方程式を書け。(空間次元は3次元とする.)

【問2】この粒子の確率密度  $\rho(x, t)$  と流れの密度  $\mathbf{j}(x, t)$  を

$$\rho(x, t) = |\Psi(x, t)|^2, \quad \mathbf{j}(x, t) = \frac{\hbar}{2mi} [\Psi^*(\nabla\Psi) - (\nabla\Psi)^*\Psi] \quad (1)$$

で定義すると、次の連続の式を満たすことを示せ.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (2)$$



【問3】以下では空間次元は1次元とする.

図1のポテンシャル ( $x < -a$  で  $V(x) = 0$ ,  $x > -a$  で  $V(x) = -V_0 < 0$ ) において、エネルギー  $E(> 0)$  の粒子の波動関数は、 $\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$  とおくと、

$$\psi(x) = \begin{cases} A \exp(ikx) + B \exp(-ikx) & x < -a \\ C \exp(ik'x) + D \exp(-ik'x) & x \geq -a \end{cases} \quad (3)$$

と書ける. 但し  $k = \sqrt{2mE/\hbar}$ ,  $k' = \sqrt{2m(E + V_0)/\hbar}$  である.

【問3-1】 $x = -a$  での波動関数の接続条件を使って、次の関係式を証明せよ.

$$\begin{pmatrix} C e^{-ik'a} \\ D e^{ik'a} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + k/k') & (1 - k/k') \\ (1 - k/k') & (1 + k/k') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A e^{-ika} \\ B e^{ika} \end{pmatrix} \quad (4)$$

【問3-2】これを用いて、左から入射したエネルギー  $E(> 0)$  の粒子の透過率と反射率を求めよ.

ただし、透過率  $T$ , 反射率  $R$  は

$$T = \frac{\text{透過波の流れの密度}}{\text{入射波の流れの密度}}, \quad R = \frac{\text{反射波の流れの密度}}{\text{入射波の流れの密度}} \quad (5)$$

で定義される. 同様に図2のポテンシャルでは、エネルギー  $E(> 0)$  の粒子の波動関数は

$$\psi(x) = \begin{cases} C \exp(ik'x) + D \exp(-ik'x) & x < a \\ F \exp(ikx) + G \exp(-ikx) & x \geq a \end{cases} \quad (6)$$

と書け、これらの係数の間には次の関係式が成立する.

$$\begin{pmatrix} F e^{ika} \\ G e^{-ika} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + k'/k) & (1 - k'/k) \\ (1 - k'/k) & (1 + k'/k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C e^{ik'a} \\ D e^{-ik'a} \end{pmatrix} \quad (7)$$

【問 4】以下では、図 3 のような井戸型ポテンシャル ( $|x| < a$  で  $V(x) = -V_0$ ,  $|x| > a$  で  $V(x) = 0$ ) での散乱問題を考える。

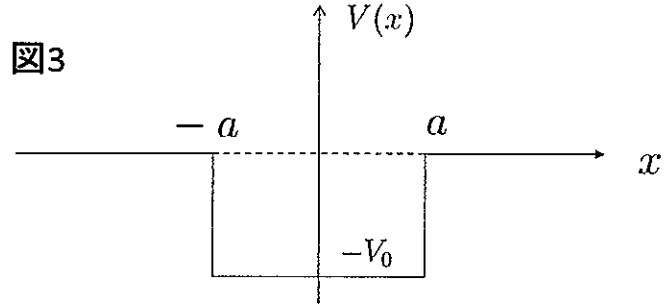


図 3

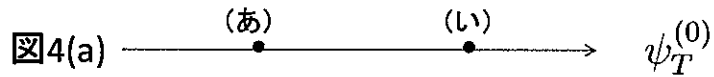


図 4(a)

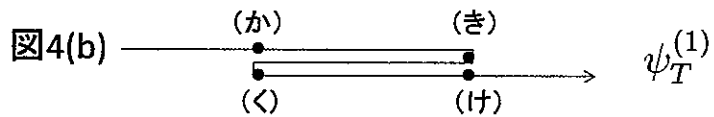


図 4(b)

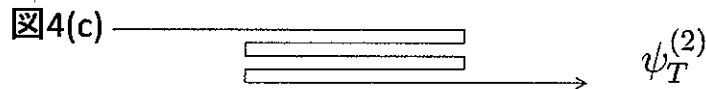


図 4(c)

この問題を、図 1 と図 2 の散乱問題を組み合わせ、ポテンシャルの壁 ( $x = \pm a$ ) による多重散乱の重ね合わせとして考察する。左 ( $x < -a$ ) から入った粒子は、 $x = -a$  と  $x = a$  にある二つの壁で散乱される。その結果、右側の領域 ( $x > a$ ) に透過されて出てくる波は、図 4(a)(b)(c) にあるように  
 (a) 壁で反射されることなくそのまま通過した波  $\psi_T^{(0)}(x)$   
 (b) 壁で 2 回反射され通過した波,  $\psi_T^{(1)}(x)$   
 (c) 壁で  $2n$  回反射した後、通過した波  $\psi_T^{(n)}(x)$   $n \geq 2$   
 の重ね合わせと見なすことができる。図 4(c) では  $n = 2$  の例を図示している。

まず図 4(a) の  $\psi_T^{(0)}(x)$  を求めよう。

【問 4-1】  $x = -a$  の壁にむかって左から粒子が入射したとすると、式 (4) で  $D = 0$  とおいてよい。これを使って、式 (4) から係数  $B, C$  を  $A$  の関数として求めよ。

【問 4-2】 次にこの波が左から右へ  $x = a$  の壁を透過する。この場合は式 (7) で  $G = 0$  とおいてよい。これを使って、式 (7) から係数  $D, F$  を  $C$  の関数として求めよ。

【問 4-3】  $\psi_T^{(0)}(x)$  は、井戸の端 (図 4(a) の (あ) と (い)) で反射することなく右へ透過した波であることを考慮すると

$$\psi_T^{(0)}(x) = \frac{4kk'}{(k+k')^2} e^{2i(k'-k)a} A e^{ikx} \quad (8)$$

と表せることを示せ。

次に図 4(b) を参考にして、2 回反射した後の透過波  $\psi_T^{(1)}(x)$  を求めよう。この波は、

- (か)  $x = -a$  を透過し、
- (き)  $x = a$  で反射し、さらに、
- (く)  $x = -a$  で反射したあと、
- (け)  $x = a$  を透過する。

(か), (け) では、問 4(a) の (あ), (い) と同様に井戸の壁で反射されることなくそのまま透過している。一方、(き) では、左から入ってきた粒子が壁 ( $x = a$ ) にあたって反射している。この反射に伴う波動関数の変化は、問 4-2 で求めた  $D$  と  $C$  の関係から読み取ることができる。

【問 4-4】(く) での反射に伴う波動関数の変化を求めるためには、式 (4) で、 $A = 0$  とおいて係数  $C$  を  $D$  を使って求めればよい。これを求めよ。

【問 4-5】問 4-1 の透過波、問 4-2 の反射波、問 4-4 の反射波、問 4-2 の透過波の結果を使って、 $\psi_T^{(1)}(x)$  が

$$\psi_T^{(1)}(x) = P\psi_T^{(0)}(x) = P \frac{4kk'}{(k+k')^2} e^{2i(k'-k)a} A e^{ikx}, \quad \text{但し } P = \left( \frac{k'-k}{k'+k} \right)^2 e^{4ik'a} \quad (9)$$

と表されることを示せ。

【問 4-6】問 4-5 の議論を繰り返すことで、壁で  $2n$  回反射した後で井戸から出てきた透過波  $\psi_T^{(n)}(x)$  を求めよ。

【問 4-7】これらの波動関数を重ね合わせることで、左から入射して図 3 の井戸型ポテンシャルを透過した波は

$$\psi_T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_T^{(n)}(x) = Q A e^{ikx} \quad (10)$$

と求めることができる。この係数  $Q$  を求めよ。また、これから透過率  $T$  を計算せよ。

【問 4-8】透過率の最大値が  $T = 1$  となることを示し、その条件を求めよ。

## 第2問

フェルミ粒子からなる系を考える。この系の中で、エネルギー $\varepsilon$ をもつ一つの状態を占める粒子数は

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\exp[(\varepsilon - \mu)/(k_B T)] + 1}$$

で与えられる（フェルミ・ディラック分布関数）。ここで  $T$  は系の温度、 $k_B$  はボルツマン定数、 $\mu$  は化学ポテンシャルである。

### 【問1】

$f(\varepsilon)$  を  $\varepsilon$  の関数として、

- (a)  $k_B T = 0$  のとき
- (b)  $k_B T$  が  $\mu$  に比べて非常に小さいとき
- (c)  $k_B T$  が  $\mu$  と同じ程度のとき

のそれぞれ場合について図示せよ。

### 【問2】

エネルギーが  $\varepsilon$  と  $\varepsilon + \Delta\varepsilon$  の間に値をもつ状態の数を  $\mathcal{D}(\varepsilon)\Delta\varepsilon$  と書くとき、系の全粒子数  $N$  および全エネルギー  $U$  を表す式を、それぞれ  $f(\varepsilon)$  と  $\mathcal{D}(\varepsilon)$  を用いて表せ。  $N$  を与えたとき、化学ポテンシャル  $\mu$  はどのように決まるか、 $k_B T = 0$  のときを例にとって議論せよ。

$mc^2$  ( $m$  は電子の静止質量) よりも十分大きなエネルギーをもつ相対論的な電子のエネルギーは  $\varepsilon = pc$  と近似できる。ただし、 $c$  は光速、 $p$  は電子の運動量（の絶対値）である。体積  $V = L^3$  の立方体の中の相対論的自由電子は、整数の組  $(n_x, n_y, n_z)$  で区別される無限個

の状態をもち、運動量  $p$  は、 $\frac{2\pi\hbar}{L}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{1/2}$  の値をとる。

### 【問3】

この立方体の中の  $N$  個の電子からなる相対論的な自由電子気体のフェルミ・エネルギーは、

$$\varepsilon_F = \pi c \hbar \left( \frac{3N}{\pi V} \right)^{1/3}$$

で与えられることを示せ。電子はスピンの自由度を持っていることに注意すること。

【問4】

この気体の絶対温度  $T=0$  でのエネルギーは、

$$U = \frac{3}{4} N \varepsilon_F$$

で与えられることを示せ。

強い重力で押しつぶされる白色矮星の中では、電子はそのエネルギーが大きいため原子核に束縛されず、自由電子気体として扱うのがよい近似になっていると考えられる。この星の質量を  $M$ 、半径を  $R$  とすると、重力による自己エネルギーはおよそ  $-GM^2/R$  で与えられる ( $G$  は重力定数)。このとき、

【問5】

重力による負の自己エネルギーが自由電子気体のもつエネルギーを上回ると、白色矮星は不安定になり重力崩壊を起こす。重力崩壊を起こさないための白色矮星の質量の上限値を、陽子の質量  $m_p$  で表せ。ただし、星の中の電子数は  $N = M/m_p$  としてよい。また、自由電子気体のエネルギーは、立方体中のそれを用いてよい。

【問6】

問5で求めた質量を、太陽質量  $M_\odot$  であらわせ。ただし、以下の物理定数を用いて有効数字一桁で求めよ。

$$c = 3.0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad \hbar = 1.1 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad [\text{J} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}],$$

$$G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$m_p = 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}, \quad M_\odot = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$$

### 第3問

ニュートンはフックへの手紙の中で「地球が自転していれば、高い所から落下する物体は、真下より東に偏って落ちる」と述べた。図1のように地表に建てた高い塔から質点を落下させたとき、落下位置の偏りの大きさを以下の手順で推定せよ。

#### 【問1】

中心力場における質量  $m$  の質点の運動を考える。場の中心を原点として、運動の起こる平面内に極座標  $(r, \varphi)$  をとる。中心力のポテンシャルを  $U(r)$  と記し、ラグランジュの運動方程式から、角運動量  $l$  が保存することを示せ。

#### 【問2】

角運動量  $l$  が保存することを使って角速度  $\dot{\varphi}$  を動径座標  $r$  で表すと、質点の運動は  $r$  の一次元運動とみなせる。全エネルギー  $E$  を  $r$  と  $\dot{r}$  で表し、エネルギー保存を示せ。

#### 【問3】

地球重力場中の自由落下実験を、地球重心を中心とした中心力場の中での質点の運動として扱う。地球は半径  $R$  の一様な球で、一定の角速度  $\omega$  で自転しているとする。赤道上で地表から垂直に立つ高さが  $h$  の塔に質点を固定しておき、時刻  $t=0$  に質点を解放して、自由落下させる。時刻  $t = \tau$  で質点が地表に達したとき、質点は塔の真下より東側に偏った地点に落ちることを示せ。地表における塔の真下とは、質点が塔に固定してあった位置と、地球中心を結ぶ直線が地表と交わる点とする。大気の影響は無視する。

#### 【問4】

塔の高さ  $h$  は地球半径  $R$  に比べて十分に小さく  $h \ll R$  であるとする。時刻  $t = \tau$  での塔の真下  $P_\tau$  から質点の落下位置までの距離  $\Delta H$  を、 $h/R$  の1次までの近似で求めよ。中心力のポテンシャル  $U(r)$  は、 $G$  を万有引力定数、 $M$  を地球の質量として、 $U(r) = -GM/r$  で表わされ、地球質量  $M$  は質点の質量  $m$  に比べて十分に大きく  $m \ll M$  であるとする。

#### 【問5】

塔の高さが  $h=593$  m であるとき、 $\Delta H$  を有効数字2桁で求めよ。自転の周期を24時間、地表の重力加速度の大きさを  $g = GM/R^2 = 9.8$  m/s<sup>2</sup> とする。

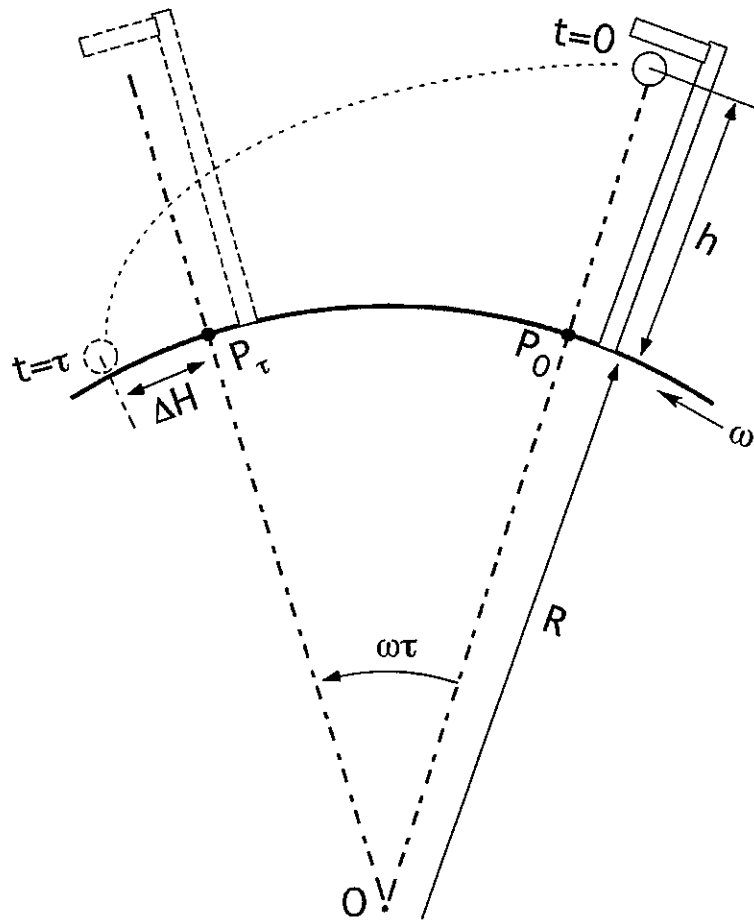


図 1: 北極方向から見た赤道面上の落下実験の模式図. 塔に固定されていた質点が  $t=0$  に解放されて自由落下を始め,  $t=\tau$  で地表に達する.  $O$ : 地球中心,  $R$ : 地球半径,  $h$ : 塔の高さ,  $\omega$ : 地球自転の角速度,  $P_0$ :  $t=0$  における塔の真下位置,  $P_\tau$ :  $t=\tau$  における塔の真下位置,  $\Delta H$ : 落下地点から  $P_\tau$  までの距離.



#### 第4問

下の図 I のように、 $z$  方向に無限に長い半径  $R_0$  ( $R_0 > 0$ ) の円柱型陰極と、内半径  $R_1$  ( $R_1 > R_0$ ) の円筒型陽極、および一様な  $z$  方向の静磁場  $\mathbf{B}$  が存在している。この陰極表面から放出される電子は、ローレンツ力をうけて電極間を運動する。この運動に関する以下の問いに答えよ。

ただし、電子の質量を  $m$ 、電荷を  $-e$  ( $e > 0$ ) とし、電極間は真空 (誘電率:  $\epsilon_0$ ) であるとする。また、座標系は下の図 II に示した円筒座標系 (基本ベクトル:  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$ ) を使い、時刻  $t$  における電子の位置ベクトルを  $\mathbf{r}(t) = r(t)\mathbf{e}_r + z(t)\mathbf{e}_z$ 、電極間の静磁場を  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$  と表す。

なお、電極は完全導体であり、電子の運動は非相対論的であるとする。

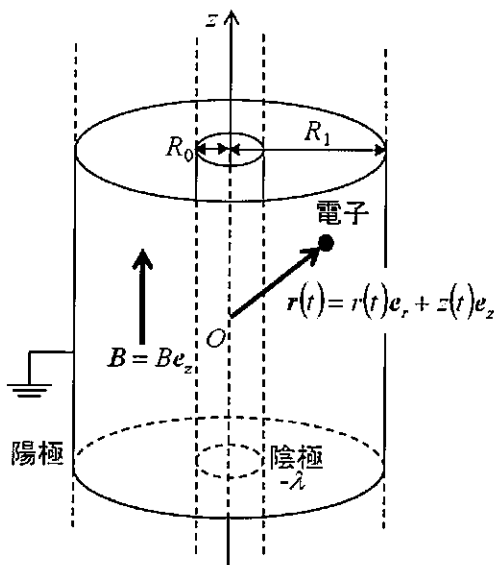


図 I:  $z$  方向に無限に長い半径  $R_0$  の円柱型陰極と、内半径  $R_1$  の円筒型陽極

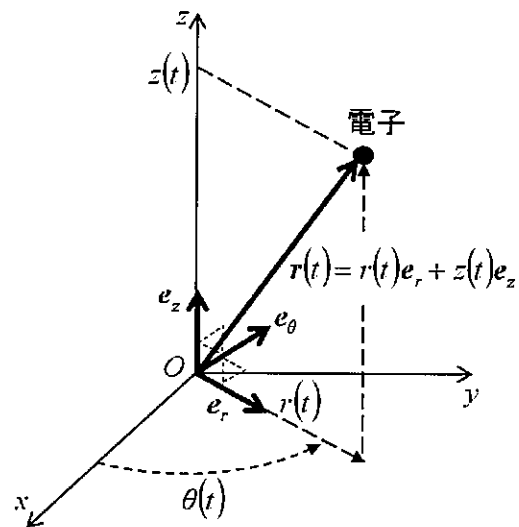


図 II: 円筒座標系と基本ベクトル  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$

#### 【問1】

時刻  $t$  における電子の速度  $d\mathbf{r}(t)/dt$  を円筒座標系の基本ベクトルを用いて

$$d\mathbf{r}(t)/dt = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_z \mathbf{e}_z$$

と表したときの、 $v_r, v_\theta, v_z$  をそれぞれ求めよ。ここで、 $v_r, v_\theta, v_z$  はそれぞれ、電子速度の  $r$  方向成分、 $\theta$  方向成分、 $z$  方向成分である。(必要ならば、円筒座標系の基本ベクトルの時間微分に関する以下の式を使用せよ。)

$$\begin{aligned} r \text{ 方向} & : & d\mathbf{e}_r/dt &= (d\theta/dt)\mathbf{e}_\theta \\ \theta \text{ 方向} & : & d\mathbf{e}_\theta/dt &= -(d\theta/dt)\mathbf{e}_r \\ z \text{ 方向} & : & d\mathbf{e}_z/dt &= 0 \end{aligned}$$

【問2】

電子の運動方程式について、 $r$ 方向成分、 $\theta$ 方向成分、 $z$ 方向成分をそれぞれ記せ。ただし、電子の位置における電場を $\mathbf{E} = E_r \mathbf{e}_r + E_\theta \mathbf{e}_\theta + E_z \mathbf{e}_z$ とする。

【問3】

陽極を接地し、陰極に単位長さ当たり $-\lambda$  ( $\lambda > 0$ )の電荷を与えた。このとき、位置ベクトル $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z$ における電場の $r$ 方向成分、 $\theta$ 方向成分、 $z$ 方向成分をそれぞれ求めよ。さらに、静電ポテンシャルを求めよ。ただし、 $R_0 \leq r \leq R_1$ とする。

【問4】

$t = 0$ で $z$ 方向の速度成分を持たない電子は、 $z$ 方向には運動をしないことを示せ。

【問5】

$t = 0$ に速度 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ で陰極表面から放出された電子について、時刻 $t$ における $\theta$ 方向の運動の運動エネルギー $-\frac{1}{2}mv_\theta^2$ を $r(t)$ の関数として求めよ。

【問6】

前問【問5】の電子について、時刻 $t$ における $r$ 方向の運動の運動エネルギー $-\frac{1}{2}mv_r^2$ を、エネルギー保存則を用いて、 $r(t)$ の関数として求めよ。

【問7】

陰極表面から速度 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ で放出された電子が、陽極に達しないための磁場強度 $B$ の範囲を求めよ。

## 第5問

### 【問1】

結晶と非晶質では原子の配列の仕方が異なり、また物質の示す物理的性質も異なっている。このような物質内の原子配列の構造を明らかにすることは新材料の開発につながると考えられる。例えばDVD-RAMの記録・消去は、DVDの表面に塗布した薄膜がレーザー光照射によって結晶から非晶質に変化（またはその逆）することを利用している。

- (1) 結晶と非晶質のそれぞれの原子配列の特徴を述べよ。
- (2) 図1はガラス状（非晶質）シリカ（ $\text{SiO}_2$ ）と結晶性シリカからのX線回折強度の散乱角依存性を示したものである。図1の説明を読み、結晶性シリカからの回折パターンが(a), (b)どちらであるか示し、またその理由を述べよ。

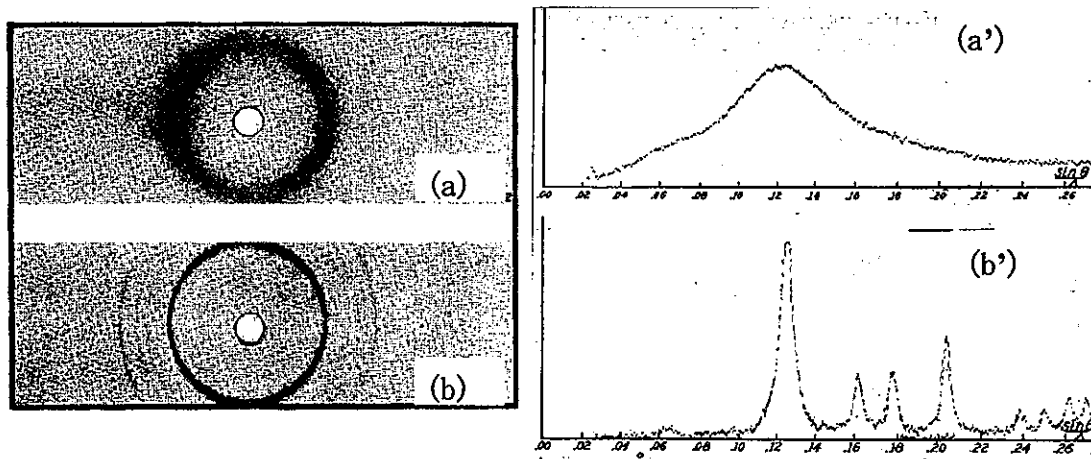


図1. 左図(a), (b)は写真法による2種類の試料からのX線強度分布で、中心が入射ビームの方向に対応し、動径方向が散乱角に対応している。右図(a'), (b')はそれぞれ左図(a), (b)から動径方向の強度分布を読み取って示したもので、縦軸は強度を示し、横軸の単位は $\sin\theta/\lambda$ である ( $2\theta$ は散乱角,  $\lambda$ は使用X線の波長)。B. E. Warren, J. Appl. Phys. 8 (1937) 645から一部改変して引用。

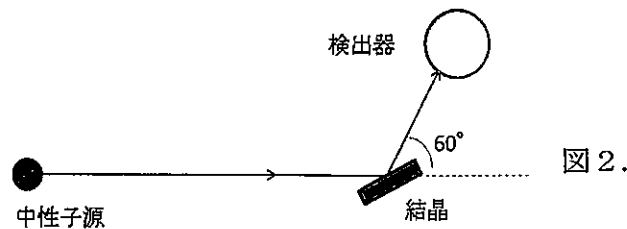
【問2】

電子や中性子・陽子などの粒子の波動性を考えた時、その波長( $\lambda$ )は、プランク定数( $h$ )、物質の静止質量( $m$ )、速度( $v$ )を用いて、ド・ブロイの式  $\lambda = h/mv$  で表される。

これに対して電磁波の波長  $\lambda$  は、光のエネルギー( $E$ )および光の速さ( $c$ )を用いて、 $\lambda = hc/E$  と表される。

中性子の静止質量  $m = 1.675 \times 10^{-27}$  [kg],  $h = 6.63 \times 10^{-34}$  [Js],  $c = 3.00 \times 10^8$  [m/s],  $1 \text{ [eV]} = 1.602 \times 10^{-19}$  [J] として以下の問いに答えよ。なお計算問題は有効数字2桁で答えること。

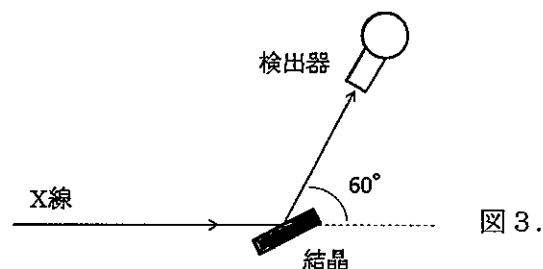
- (1) 図2に示すように中性子源で発生した白色中性子(広い波長範囲を持った中性子)がシリコン単結晶試料に入射した。この時、試料の角度を適当に調整すると、散乱角60度にした検出器により、シリコン結晶の(220)面からのブラッグ反射を観測した。ブラッグ反射を観測した中性子のド・ブロイ波長  $\lambda$  [nm], 速度  $v$  [km/s] および運動エネルギー[eV]を求めよ。但し、シリコン結晶(220)面の面間隔は0.192 nmである。



- (2) 中性子源と結晶試料の距離は 8 m, また試料と検出器の距離は 2 mであった。上記(1)の条件のもと、中性子が中性子源から検出器に到達するまでの時間[s]を求めよ。

(中性子が一定距離を進むのに要する時間を測定し、中性子のエネルギーや波長等を調べる方法を飛行時間法という。)

- (3) 今度は図3のように白色のX線がシリコン単結晶試料に入射した。試料の角度を適当に調整した時、シリコン結晶の(220)面からのブラッグ反射が上記(1)と同じ散乱角60度で観測された。この時のX線のエネルギー[eV]を求めよ。



(4) 入射X線に対する結晶の角度を変化させると，異なる波長のX線がブラッグ反射される．シリコン結晶の(220)面でブラッグ反射することが可能な最長のX線波長  $\lambda$  [nm] とその時の散乱角[度]を求めよ．

**【問3】**

2010年6月に帰還した小惑星探査機「はやぶさ」の目的のひとつは，小惑星「ITOKAWA」(図4)の一部をサンプルとして採集し，それを様々な手段により研究することで太陽系の成り立ちについての手がかりを得ることである．

「ITOKAWA」からの試料のように，構造や組成が未知のサンプルを調べる手段をひとつあげ，その測定原理を説明せよ．さらにそこから得られる情報について述べよ．

ただし，「ITOKAWA」の試料に限る必要はなく，サンプル量も十分あると想定してよい．



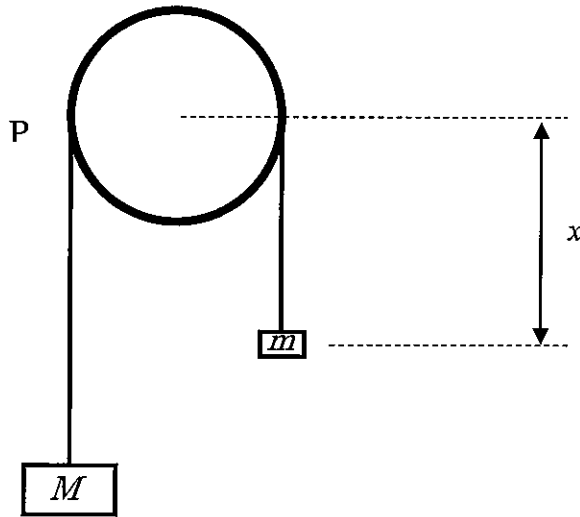
図4. 約7km地点から撮影された小惑星「ITOKAWA」の映像.

第 6 問は次頁

## 第6問

### 【問1】

下図のように滑車Pを介してひもでつながれた2つの質点（質量 $m$ および $M$ ）からなる系を考える。質点は鉛直方向にのみ運動するものとする。ひもの長さを $\ell$ とし、滑車の中心の高さから質点 $m$ までの距離を $x$ とする。滑車、ひもの質量が無視できるほど小さいものとして考え、ひもは伸縮しないものとする。また滑車の摩擦は十分に小さく無視できるものとする。以下の設問に答えよ。重力加速度の大きさは $g$ とする。



(1) 系の持つ運動エネルギー $T$ とポテンシャルエネルギー $V$ を求め、系を記述するラグランジアン $L=T-V$ を書け。

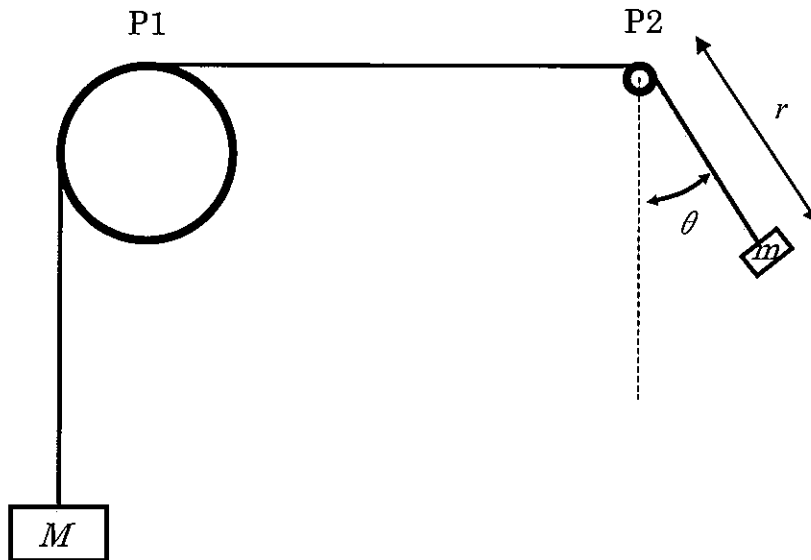
(2) ラグランジュ方程式  $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$  を時刻  $t=0$  で  $\dot{x}=0$ ,  $x=\frac{\ell}{2}$  の初期

条件のもとに解き、 $x$ を $t$ の関数として表せ。ここで $\dot{x}$ は $x$ の時間微分を意味する。

(3) 上の計算結果をもとに、ひもの張力の大きさを求めよ。

【問2】

次に2個の滑車P1, P2を介して下図のようにつながれた2個の質点(質量 $m$ および $M$ )からなる系を考える。質点 $M$ は鉛直方向にのみ運動し、質点 $m$ は滑車P2を中心として2次元平面内で運動するものとする。滑車、ひもは【問1】と同様に扱うものとして、以下の設問に答えよ。重力加速度の大きさは $g$ とする。



(1) 質点 $m$ が鉛直方向となす角を $\theta$ 、滑車P2からの距離を $r$ として系のラグランジアンを書け。ただし滑車P2の大きさは無視できるほど小さいものとする。

(2)  $r, \theta$ についてのラグランジュ方程式を解き、 $r, \theta$ が以下の連立微分方程式を満たすことを示せ。ただし $\mu = \frac{M}{m}$ とする。

$$\begin{cases} (1 + \mu)\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - g(\cos\theta - \mu) = 0 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + g\sin\theta = 0 \end{cases}$$

(3)  $\theta$ が十分小さい場合を考える。また一次近似として $\dot{\theta}^2$ を無視する。

(3-1) 時刻 $t=0$ で $r=0$ 、 $\dot{r}=v$ の初期条件のもと、 $r$ を時間の関数として表せ。

(3-2)  $\mu=3$ の場合を考える。 $\theta$ が $t$ の1次の関数として表される時、(3-1)の初期

条件に加えて質点 $m$ の運動が $\theta = \theta_0$ 方向に開始されたとき( $t=0, \theta = \theta_0$ )、時刻 $t = \frac{4v}{g}$

までの質点 $m$ の運動を図示せよ。