

総合研究大学院大学高エネルギー加速器科学研究科
5年一貫制博士課程入学試験問題
数 学

平成22年8月31日（火）9時30分～11時00分

注意

- ☆ 答案用紙の所定の欄に、受験番号、氏名を記入すること。
- ☆ 各自に計算用紙1枚が配布されていることを確認すること。
- ☆ 試験問題（4問）ごとに、異なった答案用紙を使用すること。
- ☆ 各問題に対して、答案用紙は複数使用してよいが、第〇〇問□□
枚目というように、所定の欄に、選択した問題の番号及び答案用
紙の順番を記入すること。

解答できない場合も、受験番号、氏名、問題番号を記入し、提出
すること。
- ☆ 解答用紙・計算用紙がさらに必要な場合は、挙手をして監督者に
知らせること。

第1問

3つの実数 a_k ($k = 1, 2, 3$) に対し, 行列 B を

$$B = \sum_{k=1}^3 a_k \sigma_k$$

と定義する. ここで σ_k ($k = 1, 2, 3$) はパウリ行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である.

【問1】 B^2 を求めよ.

【問2】 $A = \exp(iB)$ で定義される行列 A は, a_1, a_2, a_3 の実数値関数 $f(a_1, a_2, a_3), g(a_1, a_2, a_3)$

を用いて

$$A = f(a_1, a_2, a_3)I + i g(a_1, a_2, a_3)B$$

の形に表せる. そのときの $f(a_1, a_2, a_3), g(a_1, a_2, a_3)$ をそれぞれ求めよ. ただし, I は単位

行列 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

【問3】 A の2つの固有値, およびそれらに対応する固有ベクトルを求めよ.

第2問

【問1】 Gauss 積分 $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ を, 2次元実平面上の積分 $\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-x^2-y^2}$ を極座標系で計算することにより証明せよ.

【問2】 $\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-2x^2-3y^2-z^2+2xy+2yz}$ の値を求めよ.

第3問

次の積分の値を留数定理を使って求めよ. ただし, 【問1】では x を実数とし, また【問2】の z についての積分路は, 複素平面上の原点を中心とする単位円周上を反時計回りにとるものとする.

$$\text{【問1】 } \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-ix} - 1}{x(x+i)}$$

$$\text{【問2】 } \oint_{|z|=1} dz \frac{1}{(z-2)^2(z^{10} - \frac{1}{1024})}$$

第4問

y の x に関する微分方程式 $2x \frac{dy}{dx} + y - 3x^2y^2 = 0$ について次の問いに答えよ.

【問1】 $y = \frac{1}{z}$ と変数変換することにより z の線形微分方程式に帰着することを示せ.

【問2】 与えられた y の微分方程式の一般解を求めよ.