

総合研究大学院大学高エネルギー加速器科学研究科

5年一貫制博士課程入学試験問題

数 学

令和元年8月21日（水）9時30分～11時00分

注意

- ☆ 答案用紙の所定の欄に，受験番号，氏名を記入すること。
- ☆ 各自に計算用紙1枚が配布されていることを確認すること。
- ☆ 試験問題（4問）ごとに，異なった答案用紙を使用すること。
- ☆ 各問題に対して，答案用紙は複数使用してよいが，第〇〇問□□
枚目というように，所定の欄に，選択した問題の番号及び答案用
紙の順番を記入すること。
- 解答できない場合も，受験番号，氏名，問題番号を記入し，提出
すること。
- ☆ 答案用紙・計算用紙がさらに必要な場合は，挙手をして監督者に
知らせること。

問題は次頁

第1問

2つの正の実数 m, M に対し, 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & m \\ m & M \end{pmatrix}$$

とするとき, 次の問いに答えよ.

【問1】 A の2つの固有値を求めよ.

【問2】 それらの固有値のうち正のものを λ_+ , 負のものを λ_- とするとき,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$$

となるような正則行列 P を一つ求めよ.

【問3】 正の実数 ϵ を $\epsilon = \frac{m}{M}$ で定義する. λ_- を M と ϵ で表し, さらに ϵ の関数として

$\epsilon = 0$ のまわりでテイラー展開して ϵ の2次まで求めよ.

第2問

【問1】 x, y を実数とするとき, 積分 $\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-x^2-y^2}$ を $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ と変数変換することにより求めよ.

【問2】 問1の結果を用いて $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}x^2}$ の値を求めよ.

【問3】 n を自然数とするとき, $\int_{-\infty}^{\infty} dx x^{2n} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ の値を n を用いて表せ.

第3問

【問1】 z を複素数とするとき、複素平面上的関数

$$f(z) = \frac{1}{z^6 + 1}$$

の極をすべて求めよ.

【問2】 x を実数とするとき、実軸上の積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x^6 + 1}$$

の値を求めよ.

第4問

【問1】 x を実数とし, x の関数 $f(x)$ の不定積分の一つを $F(x)$ とすると, $F'(x) = f(x)$ が成り立つ. ただし $'$ は x に関する微分を表す. $g(x)$ を x の関数とするとき

$$y = e^{-F(x)} \int dx g(x) e^{F(x)}$$

は, 右辺の不定積分の積分定数によらず x の微分方程式

$$y' + f(x)y = g(x)$$

の解となることを示せ.

【問2】 x の微分方程式

$$y' - xy = x$$

の解 $y(x)$ で $y(0) = 0$ となるものを求めよ.