

総合研究大学院大学高エネルギー加速器科学研究所

5年一貫制博士課程入学試験問題

専門科目

平成30年8月22日（水）13時00分～16時00分

注意

☆ 答案用紙の所定の欄に、受験番号、氏名を記入すること。

☆ 各自に計算用紙1枚が配布されていることを確認すること。

☆ 6問の中から、4問を選んで解答せよ。

ただし、素粒子原子核専攻理論部門を志望する（志望順位を問わず）受験者は第1問及び第2問を必ず選択しなければならない。

☆ 試験問題（4問）ごとに、異なった答案用紙を使用すること。

☆ 各問題に対して、答案用紙は複数使用してよいが、第〇〇問□□
枚目というように、所定の欄に、選択した問題の番号及び答案用
紙の順番を記入すること。解答できない場合も、受験番号、氏名、
問題番号を記入し、提出すること。

☆ 答案用紙・計算用紙がさらに必要な場合は、挙手をして監督者に
知らせること。

問題は次頁

第1問

【問1】

一様な磁場中を運動する荷電粒子の量子力学を考える準備として、まず古典的な運動を考えよう。荷電粒子の質量を m 、電荷を q 、磁場を \mathbf{B} とすると、荷電粒子の運動方程式は

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

で与えられる。ここで、 \mathbf{v} は荷電粒子の速度である ($\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$)。以下の全ての設問 (【問2】を含む) では、磁場は z 軸の正の方向に向いているとし、 $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ 、 $B > 0$ 、電荷 q は正とする ($q > 0$)。

- (1) この運動方程式は、 z 方向については一様等速運動を与えるだけなので以下では考えないことにする。 x, y 方向の運動方程式を解いて、解が次の円運動で与えられることを示せ。ただし、 $\omega = \frac{qB}{m}$ であり、 R, α, x_c, y_c は実数の定数 ($R > 0$) であるとする。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \sin(\omega t + \alpha) \\ \cos(\omega t + \alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} \quad (1)$$

- (2) 座標 (x_c, y_c) は、 xy 平面内の円運動の中心座標である。解(1)を用いて、この座標値 (x_c, y_c) が次のように荷電粒子の位置 (x, y) および速度 (v_x, v_y) を用いて表せること、また時間に依存しないことを示せ。

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \frac{1}{\omega} v_y \\ y - \frac{1}{\omega} v_x \end{pmatrix}$$

【問2】

次に量子力学を考える。【問1】と同じ設定とし、ここでも z 方向については自明であるから考えない。 x, y 平面内のスピンを持たない荷電粒子の運動を記述するハミルトニアンは

$$\hat{H}_\perp = \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}}_\perp - q\mathbf{A}_\perp(\hat{\mathbf{x}}_\perp))^2$$

で与えられる。ここで $\hat{\mathbf{p}}_\perp, \hat{\mathbf{x}}_\perp$ は、それぞれ運動量、座標の x, y 成分の演算子を表し、 $\hat{\mathbf{p}}_\perp = (\hat{p}_x, \hat{p}_y)$ 、 $\hat{\mathbf{x}}_\perp = (\hat{x}, \hat{y})$ を意味する。また、 $\mathbf{A}_\perp = (A_x, A_y)$ は z 方向に一定の磁場 B を生成するベクトルポテンシャルであり、 $B = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$ を満たす。この B は演算子ではなく、決まった値をもつ定数として扱うことができる。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 座標と運動量の演算子 $\hat{\mathbf{x}}_\perp, \hat{\mathbf{p}}_\perp$ は、 $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$ 、 $[\hat{y}, \hat{p}_y] = i\hbar$ (それ以外の交換関係は全てゼロ) を満たすとする。このとき、 $\hat{\pi}_\perp = \hat{\mathbf{p}}_\perp - q\mathbf{A}_\perp(\hat{\mathbf{x}}_\perp)$ で定義される量が次の交換関係を満たすことを示せ。(ただし $\hat{\pi}_\perp$ の各成分は $\hat{\pi}_x = \hat{p}_x - qA_x(\hat{x}, \hat{y})$ 、 $\hat{\pi}_y = \hat{p}_y - qA_y(\hat{x}, \hat{y})$ で与えられる。)

$$[\hat{\pi}_x, \hat{\pi}_y] = i\hbar q B$$

- (2) さらに、演算子 \hat{X}, \hat{P} を次のように定義する。

$$\hat{X} \equiv \frac{1}{\sqrt{qB}} \hat{\pi}_x, \quad \hat{P} \equiv \frac{1}{\sqrt{qB}} \hat{\pi}_y.$$

すると、 \hat{X} と \hat{P} は $[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar$ などを満たすので、互いに共役な「座標」と「運動量」として考えることができることがわかる。このとき、ハミルトニアン \hat{H}_\perp を \hat{X} と \hat{P} で表すと、それが1次元の調和振動子を記述することを示せ。

- (3) 生成消滅演算子を次で定義する。

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} (\hat{X} - i\hat{P}), \quad \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} (\hat{X} + i\hat{P}).$$

このとき、ハミルトニアン \hat{H}_\perp を \hat{a}^\dagger, \hat{a} を用いて表し、その固有値が $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ で与えられることを示せ ($n \geq 0$)。この離散的なスペクトルをランダウ準位という。

- (4) 最低ランダウ準位 ($n = 0$) と呼ばれる基底状態 $|0\rangle$ は $\hat{a}|0\rangle = 0$ を満たす。この状態の X 表示 (X を座標と見なした時の座標表示) での波動関数 $\varphi_0(X) = \langle X|0\rangle$ が次で与えられることを示せ (N は規格化因子)。

$$\varphi_0(X) = N \exp\left\{-\frac{X^2}{2\hbar}\right\}$$

ただし、 $|X\rangle$ は演算子 \hat{X} の固有状態である $\hat{X}|X\rangle = X|X\rangle$ 。また、固有値 E_n をもつランダウ準位 $|n\rangle$ の波動関数 $\varphi_n(X) = \langle X|n\rangle$ を、最低ランダウ準位の波動関数 $\varphi_0(X)$ と微分演算子 $\frac{d}{dX}$ などを用いて与えよ。ただし、規格化因子を決定する必要はない。

- (5) 元々のハミルトニアンは2次元平面上の荷電粒子の座標、 x と y という二つの自由度を記述するものであったが、 \hat{X}, \hat{P} で表されたハミルトニアンは1次元の (1自由度の) 調和振動子に帰着した。実は、もう一つの自由度は各ランダウ準位が無限に縮退しているという形で隠れている。そのような無限に縮退した状態は、古典的運動を考えた際の円運動の中心座標を任意に取ることができるという事実と関係する。そこで、【問1】の古典力学の考察で導入した中心座標の量子力学版 (演算子版) を次のように定義しよう。

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_c \\ \hat{y}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x} + \frac{1}{qB} \hat{\pi}_y \\ \hat{y} - \frac{1}{qB} \hat{\pi}_x \end{pmatrix} \quad (2)$$

このとき、この中心座標の演算子 \hat{x}_c と \hat{y}_c がハミルトニアン \hat{H}_\perp と交換することを示せ。また、この性質を使って各ランダウ準位が無限に縮退していることを示し、無限に縮退した状態を区別するためにどのようにすればよいのかを議論せよ。

- (6) さらに、中心座標 (2) からの距離の2乗を表す演算子を $\hat{R}^2 = (\hat{x} - \hat{x}_c)^2 + (\hat{y} - \hat{y}_c)^2$ と定義するとき、この演算子の固有値を求めよ。また、古典力学との対応を考えて、各ランダウ準位がどのような状態であるのかを議論せよ。

第2問

現在、宇宙は 2.73 K で特徴づけられる一様等方な光子で満たされていることがよく知られており、これは宇宙マイクロ波背景放射と呼ばれている。さて、標準宇宙論は、同様に一様等方なニュートリノ放射の存在も予言するが、これは宇宙マイクロ波背景放射とは異なった温度で特徴づけられると期待されている。現在の宇宙ニュートリノ背景放射を特徴づける温度を、簡略化したモデルを用いて考えよう。

ここでは(極めて耐熱性が高く、何も通さない、理想的な)断熱壁に閉じ込められた気体を、準静的に膨張させる過程を考える。Boltzmann 定数を k として、温度 T が $T_{\text{pair}} \approx 1 \text{ MeV}/k$ 以上のとき、光子は対生成・対消滅反応を介して電子・陽電子との熱平衡を達成する。一方で、 T_{pair} 以下になると対消滅により可逆的に電子・陽電子が失われ、光子だけの気体になる。この問題では簡単のため、ニュートリノは質量を持たず、さらに断熱壁を除く物質とは一切の相互作用をしない粒子だとする。

以下のことを証明なしに用いてよい。換算 Planck 定数を \hbar として、相空間の体積 $2\pi\hbar$ が 1 つの量子状態に対応する。温度 T かつ化学ポテンシャルがゼロの環境下では、エネルギー E の状態における粒子数の期待値は、ボソンなら Bose-Einstein 分布関数

$$b(E) = \frac{1}{e^{E/kT} - 1}, \quad (1)$$

フェルミオンであれば Fermi-Dirac 分布関数

$$f(E) = \frac{1}{e^{E/kT} + 1} \quad (2)$$

で与えられる。粒子の速度は、運動量 p と光速 c を用いて $v = pc^2/E$ と表される。スピンの自由度に起因して光子・電子・陽電子は各々 2 自由度を持ち、ニュートリノは合計で 6 自由度を持つ。また

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}, \quad \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x + 1} dx = \frac{7\pi^4}{8 \cdot 15} \quad (3)$$

である。

【問1】

光子は化学ポテンシャルがゼロのボソンである。高温の光子気体は、対生成・対消滅反応を介してフェルミオンである電子・陽電子との熱平衡に達するが、この過程で生成された電子・陽電子の化学ポテンシャルもやはりゼロとなる。このとき、(1) 光子、(2) 温度 $T \gg T_{\text{pair}}$ における電子について、それぞれのエネルギー密度 u および圧力 P を温度 T の関数として求めよ。電子の質量は kT_{pair}/c^2 程度であることに注意すること。陽電子についての結果も電子と同じである。

【問2】

同様に、上記 (1)、(2) それぞれについてエントロピー密度 s を温度 T の関数として求めると、ある定数 C を用いて (1) 光子では

$$s_\gamma = CT^3, \quad (4)$$

(2) 電子では

$$s_e = \frac{7}{8}CT^3 \quad (5)$$

となる。この定数 C を具体的に求めよ。この際、エントロピー密度が温度だけの関数であることを考えて、熱力学第一法則を用いるのが簡単である。

以降の問題では、定数 C の詳細な値ではなく、この関係式が主な道具となる。よって、 C に具体的な表式を代入せず、上式を用いて議論を進めてよい。

【問3】

光子・電子・陽電子が温度 $T_i \gg T_{\text{pair}}$ での平衡状態にあるような始状態を用意し、準静的に断熱膨張させて温度を下げたところ、電子・陽電子全体の対消滅は起こらず $T_f \gg T_{\text{pair}}$ のままであった。このとき、体積は何倍になったか、 T_i および T_f を用いて表わせ。

【問4】

先の問題と同様の設定で、温度 T_i の始状態から断熱膨張させたところ、今度は電子・陽電子が全体として対消滅を起こし、残った光子の温度は $T_f \ll T_{\text{pair}}$ になった。このとき、体積は何倍になったか、 T_i および T_f を用いて表わせ。

【問5】

今度は始状態としてやはり温度 $T_i \gg T_{\text{pair}}$ で、ただし光子・電子・陽電子に加えてニュートリノも共存する熱平衡状態を用意した。これを光子が $T_{f,\gamma} \ll T_{\text{pair}}$ に冷えるまで準静的に膨張させた。冒頭に記載の通り、ニュートリノと他の粒子との間に反応がないとした場合に、終状態でのニュートリノの温度 $T_{f,\nu}$ はいくつになるか、 $T_{f,\gamma}$ を用いて表わせ。ニュートリノも化学ポテンシャルがゼロのフェルミオンとして扱ってよい。

補足: この問題では、簡略化のためにニュートリノが他の粒子と相互作用しないとしたので、初期状態を同じ温度で用意したのは非物理的に見えるかもしれない。これは本来、ある時刻まではニュートリノを含む全ての粒子がお互いに反応して平衡に達していたところ、宇宙の膨張に伴ってニュートリノが他の粒子と反応できなくなったため、温度が等しいまま相互作用だけしなくなった状態を考えている。

【問6】

ここまで解くとわかるように、断熱膨張で T_{pair} 以下まで冷えた際にニュートリノと光子とで温度に差が出ることは、定性的には(ほぼ)計算するまでもなくわかる。そこで、どちらが高い/低いかを明確にしつつ、数式を使わずに改めて簡潔に結果を述べよ。

第3問

中心力をあらわすポテンシャル $U(x, y, z) = U(r)$ のなかの質点 (質量 m) の運動を考える. 時刻 t での質点の位置は $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ であらわされ, 質点の速度は $\dot{\mathbf{r}}(t) \equiv d\mathbf{r}(t)/dt$ であらわされるとする.

【問1】

(1) 直交座標系 (x, y, z) における質点の運動エネルギー T を示せ.

(2) ラグランジアン $L = T - U$ を用いると, x, y, z に共役な運動量は,

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}$$

であたえられる. 直交座標系における質点のハミルトニアン $H(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$ を求めよ. ここで, 直交座標系におけるハミルトニアンは,

$$H = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} - L$$

であたえられる.

(3) 直交座標系から, 正準変換の母関数,

$$W = -(p_x r \sin \theta \cos \phi + p_y r \sin \theta \sin \phi + p_z r \cos \theta)$$

を用いて, 新しい座標系 (r, θ, ϕ) に変換したい. この正準変換によるハミルトニアンが,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} p_\phi^2 \right) + U(r)$$

となることを示せ. また, この正準変換は直交座標系からどのような座標系への変換をあらわすか述べよ.

ここで, 直交座標系と新しい座標系における変数とハミルトニアンは,

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\partial W}{\partial p_x}, & y &= -\frac{\partial W}{\partial p_y}, & z &= -\frac{\partial W}{\partial p_z} \\ p_r &= -\frac{\partial W}{\partial r}, & p_\theta &= -\frac{\partial W}{\partial \theta}, & p_\phi &= -\frac{\partial W}{\partial \phi} \\ \mathcal{H} &= H + \frac{\partial W}{\partial t} \end{aligned}$$

という関係をもつ.

(4) 正準方程式は,

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r}, & \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta}, & \frac{d\phi}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\phi} \\ \frac{dp_r}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r}, & \frac{dp_\theta}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta}, & \frac{dp_\phi}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi}\end{aligned}$$

であたえられる. $\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$ を用いて p_r, p_θ, p_ϕ をあらわせ. また, p_ϕ と $l^2 \equiv p_\theta^2 + p_\phi^2 / \sin^2 \theta$ が保存量となることを示せ.

【問 2】

中心力をあらわすポテンシャル $U(r)$ の具体的な関数形を決めたときの運動を考える. 質点は x - y 面内で運動するものとし, $\theta = \pi/2, \dot{\theta} = 0$ とする. また, 角運動量は保存量であり $p_\phi = h$ とする. ここで, h は 0 でない定数とする.

(1) ポテンシャルは,

$$U(r) = U_1(r) = -\frac{\mu}{r}$$

であたえられるものとし, μ は正の定数とする. r 方向の運動方程式を示せ.

(2) ポテンシャル $U_1(r)$ のなかで質点が原点を中心に半径 a をもつ円軌道で運動する場合を考える. 半径 a と角運動量 h の関係式を求めよ. また, 質点が原点を一周する時間 T が半径 a の何乗に比例するか求めよ.

(3) 次に, ポテンシャルが,

$$U(r) = U_2(r) = \frac{1}{2}kr^2$$

であたえられる場合を考える. ここで, k は正の定数とする. r 方向の運動方程式を示せ. また, x - y 座標で考えたとき, x 方向と y 方向の運動方程式を示せ.

(4) ポテンシャル $U_2(r)$ のなかで質点が原点を中心に半径 a をもつ円軌道で運動する場合を考える. 質点が原点を一周する時間 T を求めよ. また, 質点が原点を一周する時間 T は半径 a に依存するか答えよ.

第4問

【問1】

図1のように真空（誘電率 ϵ_0 [F/m]）に置かれた無限円筒型コンデンサに電圧 V [V] を与えた場合を考える。内部導体には単位長さあたり λ [C/m]（外導体には $-\lambda$ ）の電荷が帯電する。この場合、対称性より電場 E [V/m] は r 方向のみとなる。電場に関するガウスの法則を用いて以下の問に答えよ。

電場に関するガウスの法則

閉曲面 S を貫く電束は閉曲面内部の電荷と等価であるという法則。電束密度 $D = \epsilon E$ [C/m²] (ϵ :誘電率 [F/m]), 閉曲面内の電荷の合計を Q [C] との関係は、以下のようなになる。

$$\iint_S D \cdot dS = Q$$

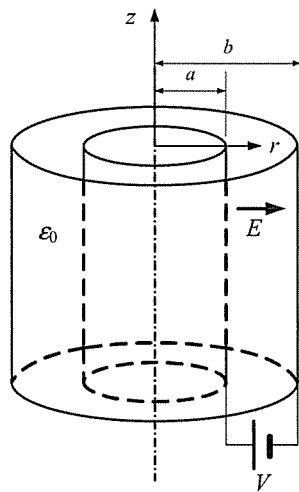


図 1: 円筒コンデンサ

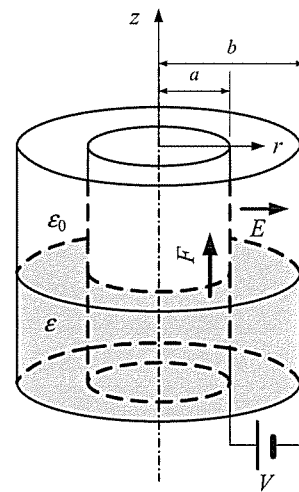


図 2: 誘電体を挿入した円筒コンデンサ

- (1) 図1において中心からの距離 r ($a < r < b$) に発生する電場 $E(r)$ [V/m] および単位長さあたりに帯電する電荷密度 λ [C/m] を電圧 V [V] を使った関係式で表わせ。
- (2) 図1において電圧 V [V] を与えた場合の単位長さあたりに蓄えられるエネルギー u [J/m] を求めよ。(ヒント: コンデンサの静電容量を C [F] とするとエネルギー U [J] は $U = (1/2)CV^2$ となる。静電容量とは与えられた電圧 V [V] と蓄えられている電荷 Q [C] の関係を表す物理量であり、 $Q = CV$ の関係にある。)
- (3) 前問の円筒コンデンサに図2のように一部に誘電率 ϵ [F/m] の誘電体が挿入された場合、その誘電体の端面には z 方向に力が働く。この誘電体の端面全体に働く力 F [N] を求めよ。
(ヒント: 誘電体端面が動いた場合のコンデンサのエネルギー変化を考えるとよい。境界面が Δz だけ変化した場合のエネルギーの増加 ΔU は力による仕事量 $F\Delta z$ に等しいことを利用すると簡単に解ける。)

【問2】

図3のように z 軸を中心に半径 a [m] の無限に長い円柱状の導線に定常電流 I が一様に流れている。アンペールの法則を用いて定常電流 I [A] が作る磁場 H [A/m] の大きさを導線内 ($r < a$) と導線外部 ($r > a$) において求めよ。(磁場は、対称性より z 軸を中心にした円の接線方向に発生し、向きは電流に対しては右ねじの方向である。)

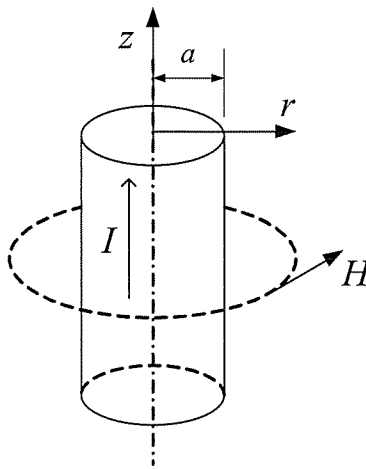


図 3: 無限円柱定常電流

アンペールの法則

閉曲線 C を縁に持つ曲面 S において、電流密度 J [A/m²], 磁場 H [A/m] は以下の関係式を満たす。

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

【問3】

図4のような直線導線 AB に B から A の方向に定常電流 I [A] が流れている。長さ方向に l_1 [m], l_2 [m] と分割する位置を点 O として、そこから線分 AB に直角方向の距離が a [m] である点を P とする。点 P での直線導線 AB による磁場 H [A/m] をビオ・サバルの法則を使って求めなさい。(磁場は図4のように紙面に垂直な方向に発生するので、この磁場の大きさ H を求めれば良い。)

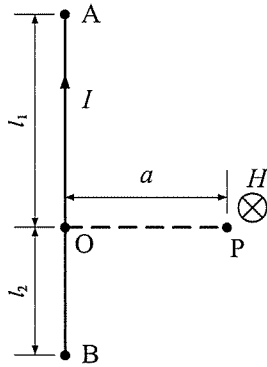


図 4: 直線導線に流れる定常電流

ビオ・サバルの法則

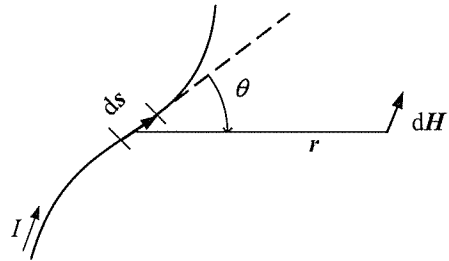
右の図のように線上電流 I において、その微小部分 ds (電流方向を正とする) が、そこからの変位 r での点で発生させる磁場 dH は

$$dH = \frac{I}{4\pi} \frac{ds \times r}{r^3}$$

となる。すなわち、 ds と r のなす角を θ とすると、その大きさは

$$dH = \frac{I}{4\pi} \frac{ds \sin \theta}{r^2}$$

となり、方向は ds と r の外積の方向である。



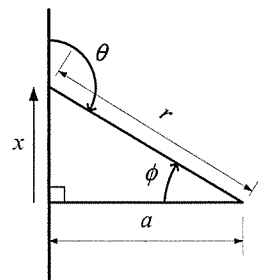
問3のヒント

右の図のような変数 x, r, θ, ϕ を考えると、

$$\sin \theta = \sin(\phi + \pi/2) = \cos \phi = \frac{a}{r}$$

$$\tan \phi = \frac{x}{a}, \quad \sin \phi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \quad dx = \frac{a}{\cos^2 \phi} d\phi$$

という関係がある。



第5問

【問1】

多くの粒子検出器は、粒子の運動量を測定し、電荷の極性を判定するために、大型の超伝導電磁石によって生成される磁束密度空間を利用している。発生する磁束密度 B (T(テスラ)) は、1 m あたりのターン数 (巻線数) を n (ターン/m)、線材に流れる電流を I (A) とすると、次式で求めることができる。なお、 μ_0 は真空の透磁率 $4\pi \times 10^{-7}$ H/m である。

$$B = \mu_0 n I$$

ちなみに、Belle II 超伝導電磁石では $n = 330$ ターン/m でコイルを巻き線して、磁束密度が所定の値 (約 1.5 T) になるよう電流 I を 4000 A 付近で調整した。ここで超伝導 (ニオブチタン) コイルと銅コイルの肉厚の比較を試みる。1 m あたりのアンペア・ターン数 nI は、コイル断面の電流密度 J (A/mm²) とコイル肉厚 t (m) の積に等しい。

$$nI = tJ$$

一般に超伝導コイル断面の電流密度は 100 A/mm²、銅コイルの電流密度は 5 A/mm² で設計される。この数値を使い、励磁電流 I は 4000 A、 n は 330 ターン/m 固定とした場合、コイルの肉厚 t は超伝導コイルと銅コイルおのおのいくらか (mm) になるか。

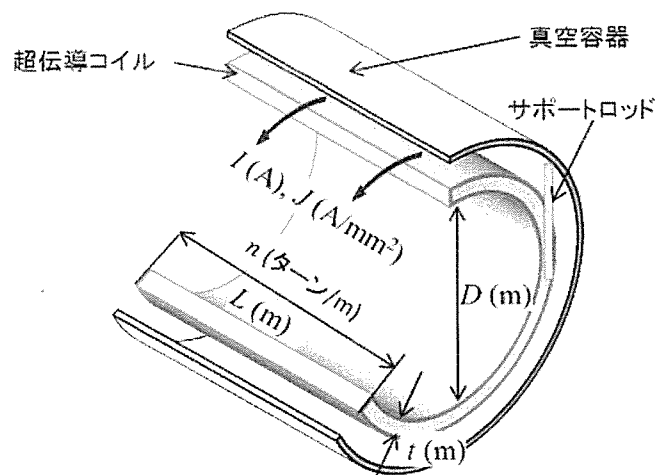


図 1: 超伝導電磁石の概略構造

【問2】

超伝導コイルは、断熱のため図1に描かれるように真空容器内部に棒 (サポートロッド) で吊下げられ、内部で浮いている状態になっている。このサポートロッドを伝わって入ってくる伝導侵入熱でコイルの温度が上がらないよう、コイル内に液体ヘリウム (4.2 K) を流して冷却している。このサポートロッドでの熱侵入量を見積る。下表は温度によって変化するサポートロッドの熱伝導率 λ (W/m·K) を 4.2 K からある温度 T_L (K) まで温度積分したものである。

T_L (K)	$\int_{T=4.2\text{K}}^{T_L} \lambda(T)dT$ (W/m)
6	0.164
10	0.507
20	1.44
40	3.69
60	6.51
77	9.20
100	14.1
200	38.5
300	103.1

例えば、断面 A (m^2)、長さ L (m) のサポートロッドの低温端が 4.2 K で高温側が 40 K だとすると伝導熱侵入量 Q (W) は

$$Q = \frac{A}{L} \int_{T=4.2\text{K}}^{T=40\text{K}} \lambda(T)dT = 3.69 \times \frac{A}{L}$$

となる。

- (1) サポートロッドの長さを 1 m, 断面積 10 mm^2 とすると, 真空容器 (300 K) から超伝導コイル (4.2 K) への伝導熱侵入量はいくらになるか。
- (2) 同じ寸法のサポートロッドで下図のように丁度真ん中 0.5 m の場所で液体窒素 (77 K) により中間冷却を施した。この場合超伝導コイル (4.2 K) への伝導熱侵入量はいくらか。
- (3) 液体窒素による中間冷却の位置を超伝導コイル側 (4.2 K) に近づけていくと伝導熱侵入量の低減効果はなくなる。その位置は超伝導コイルからいくらの距離の場所になるか。

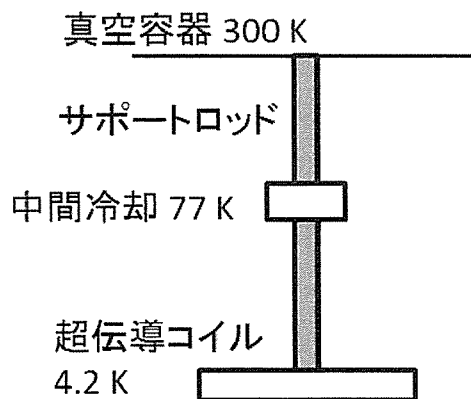


図 2: 真空断熱構造 (サポートロッド) 模式図

第6問

【問1】

図1(a)に示すように、電子が y 軸上を光速に近い速さ v [m/s]で等速直線運動している。電子が進む先には y 軸に沿って十分な長さにわたって永久磁石が規則正しく並べられ、周期 λ_M [m]で極性が変化する磁場が y 軸上に作られている。図1(b)に示すように、その後電子は磁場中で、電子から見た磁場の周期 λ'_M で振動し、振動の周期と同一の波長 $\lambda'_e = \lambda'_M$ の電磁波を発する。電磁波は、 y 軸上に置かれた測定器で観測する。電子とともに動く系を K' 系、静止した系を K 系と呼び、磁場の強さは十分に弱く、磁場中を進む電子の y 方向の速さは v とみなせるものとして、以下の設問に答えなさい。

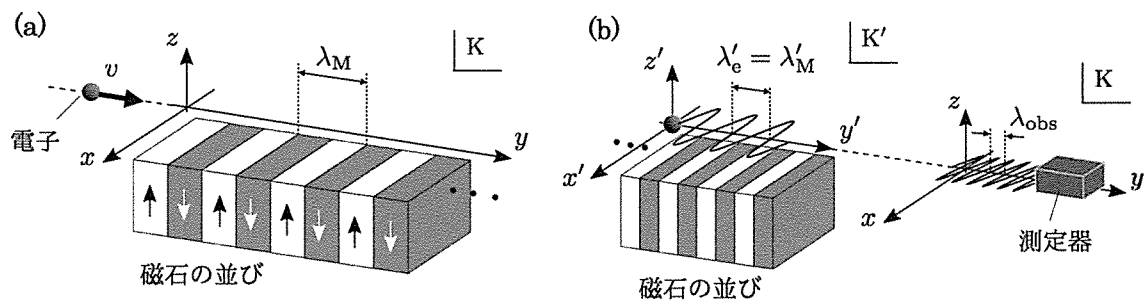


図1: 光速に近い速さで運動する電子が磁場中で発する電磁波の観測。

(1) 以下の文章中の空欄(ア)、(イ)にあてはまる数式を答えなさい。

K 系の座標 (x, y, z) [m]および時間 t [s]と K' 系の座標 (x', y', z') [m]および時間 t' [s]の間には、光速を c [m/s]として以下の関係式が成り立つ。

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \gamma(y - vt) \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}y\right) \end{cases} \quad (1)$$

γ はローレンツ因子で、次式で与えられる。

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad (2)$$

このとき、式(1)の第2式および第4式から時間 t を消去して変形すれば、 y, t', v, c を使って $y' = \text{(ア)}$ と書ける。

さて、電子から見た磁場周期がどのように表されるだろうか。そのために、 K 系の座標 y_0 と、座標 $y_1 = y_0 + \lambda_M$ が K' 系でどのように変換されるかを考える。

K' 系における座標 y'_0 と y'_1 は、座標 y_0 と y_1 をそれぞれ空欄(ア)の式へ代入することで得られる。 $y_1 - y_0 = \lambda_M$ であることに注意して変形すれば、 K' 系から見た磁場周期は λ_M と

γ を使って,

$$\lambda'_M = y'_1 - y'_0 = \boxed{(イ)} \quad (3)$$

と書ける.

- (2) 以下の文章中の空欄(ウ), (エ)にあてはまる数式を答えなさい.

電子が感じる磁場周期すなわち電子が発する電磁波の波長 $\lambda'_e = \lambda'_M$ は, 測定器でどのような波長として観測されるだろうか. 測定器で観測される電磁波の波長を λ_{obs} とすれば,

$$\lambda_{\text{obs}} = \gamma \left(1 - \frac{v}{c}\right) \lambda'_e \quad (4)$$

と表される. ここで, 式(2)が,

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \quad (5)$$

と変形できることに注意して $1/\gamma^2$ の次数まで展開すれば, $v/c \approx \boxed{(ウ)}$ と近似できる. よって, $\lambda'_e = \lambda'_M$ であることに注意して式(3), (4)とから, γ と λ_M を使って,

$$\lambda_{\text{obs}} = \boxed{(エ)} \quad (6)$$

と書ける.

【問2】

問1の結果をふまえて, 以下の設問に答えなさい.

- (1) 電子の全エネルギーを E , 電子の静止質量を m , 電子の運動量の大きさを p とするとき, 電子の全エネルギーは $E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$ と表される. このとき, $p = \gamma mv$ となることを使って, $\gamma = E/(mc^2)$ となることを示せ.
- (2) 電子を電圧差 1 V で加速したときに電子が得るエネルギーを 1 eV と表す. 全エネルギー $E = 2.55 \times 10^9$ eV の電子を使って波長 $\lambda_{\text{obs}} = 5.0 \times 10^{-10}$ m の X 線を発生させるために必要な, 磁場周期 λ_M の数値を計算して, 有効数字 2 桁で答えよ. ただし, 電子の静止質量エネルギーの近似値 $mc^2 \approx 5.1 \times 10^5$ eV を用いよ.