

総合研究大学院大学高エネルギー加速器科学研究科

5年一貫制博士課程入学試験問題

数 学

平成20年9月2日(火) 9時30分～11時00分

注意

- ☆ 答案用紙の所定の欄に、受験番号、氏名を記入すること。
 - ☆ 各自に計算用紙1枚が配布されていることを確認すること。
 - ☆ 試験問題(4問)ごとに、異なった答案用紙を使用すること。
 - ☆ 各問題に対して、答案用紙は複数使用してよいが、第〇〇問□□
枚目というように、所定の欄に、選択した問題の番号及び答案用
紙の順番を記入すること。
- 解答できない場合も、受験番号、氏名、問題番号を記入し、提出
すること。

数学

第1問

(1) 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列を考える。

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & x \end{pmatrix}$$

ただし、 a, x は実数で $0 < a < 1$ 、 $-\infty < x < \infty$ とする。 M は直交行列

$$V = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

を使って次のように対角化できる。

$$V^{-1}MV = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

ここで二つの固有値 λ_1 と λ_2 は実数であり、 $\lambda_1 > \lambda_2$ を満たすものとする。 $\lambda_1, \lambda_2, \theta$ を x の関数とみなしたときの $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \theta(x)$ を求め、図示せよ。

第2問

次の積分を求めよ。

(1)

$$I(n, a) = \int_0^{\infty} dx x^n e^{-ax}$$

ただし、 n はゼロまたは正の整数、 a は正の実数とする。

(2)

$$J(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{ikx}}{x^2 + 1}$$

ただし、 k は実数とする。

第3問

x, y を実数として、次の微分方程式を考える。

$$\frac{dy}{dx} = y(1 - y)$$

- (1) $x = 0$ で $y = c$ とした場合の解を求めよ。
- (2) $0 < c < 1$ の場合、 $-\infty < x < \infty$ の範囲で $y(x)$ を図示せよ。
- (3) $c > 1$ の場合は、 x のある値 x_{min} で y は無限大となる。 x_{min} を求め、 $x_{min} < x < \infty$ の範囲で $y(x)$ を図示せよ。

第4問

(1) 実数 x, y に対し、 $x^2 + y^2 = 1$ の条件のもとで

$$F(x, y) = 4x + 3y$$

の最大値とそれを与える x と y の値を求めよ。

(2) 実数 x, y に対し、 $x^{2n} + y^{2n} = 1$ (n は正の整数) の条件のもとで

$$F(x, y) = 4x + 3y$$

の最大値とそれを与える x と y の値を $F_{\max}(n)$ 、 $x_{\max}(n)$ 、 $y_{\max}(n)$ とする。 $n \rightarrow \infty$ のときの F_{\max} 、 x_{\max} 、 y_{\max} を求めよ。

総合研究大学院大学高エネルギー加速器科学研究科

5年一貫制博士課程入学試験問題

物 理

平成20年9月2日（火）13時00分～16時00分

注意

☆ 答案用紙の所定の欄に、受験番号、氏名を記入すること。

☆ 各自に計算用紙1枚が配布されていることを確認すること。

☆ 7問の中から、4問を選んで解答せよ。

ただし、素粒子原子核専攻理論分野（含む宇宙理論）を志望する

受験者は第1問（量子力学）を必ず選択しなければならない。

☆ 試験問題（4問）ごとに、異なった答案用紙を使用すること。

☆ 各問題に対して、答案用紙は複数使用してよいが、第〇〇問□□

枚目というように、所定の欄に、選択した問題の番号及び答案用

紙の順番を記入すること。解答できない場合も、受験番号、氏名、

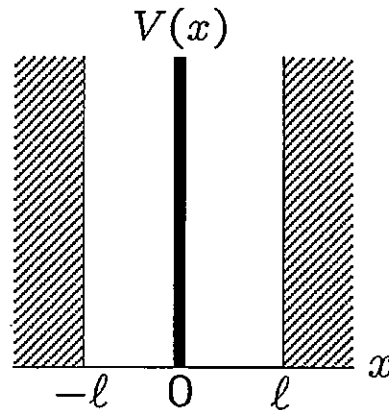
問題番号を記入し、提出すること。

第1問 量子力学

ポテンシャル $V(x)$ 内にある質量 m の点粒子の量子力学を考える。 $V(x)$ は

$$V(x) = \begin{cases} v\delta(x) & |x| \leq \ell \\ \infty & |x| > \ell \end{cases} \quad (1)$$

で与えられる。但し v は正またはゼロの実数であり、 $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数である。(下の図参照。) 又、点粒子が動きうるのは、 x 方向で表わされる 1 次元空間とする。以下の設問に答えよ。



[1] ポテンシャル $V(x)$ は $x \mapsto -x$ という空間反転に関して対称であるので、エネルギー固有状態の波動関数 $\psi(x)$ は、偶関数と奇関数に分類できる。 $v = 0$ のとき、 $\psi(x)$ が偶関数と奇関数の各々の場合について、エネルギー固有値と固有関数を求めよ。

[2] $v \neq 0$ のときにエネルギー固有状態の波動関数 $\psi(x)$ を求める際、 $x = 0$ における接続条件が

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \{\psi'(\epsilon) - \psi'(-\epsilon)\} = \frac{2mv}{\hbar^2} \psi(0) \quad (2)$$

で与えられることを、シュレディンガー方程式から導け。但し、左辺の $\epsilon \rightarrow +0$ は、正から 0 に近づく極限を意味する。

[3] $\psi(x)$ が奇関数の場合について、エネルギー固有値のスペクトルを求めよ。

[4] $\psi(x)$ が偶関数の場合について、エネルギー固有値のスペクトルを求めよ。但し、ポテンシャル $V(x)$ に現れるパラメタ v は十分大きいものとして、 $\frac{1}{v}$ に関して一次の近似を用いよ。

[5] v が十分大きいとき、偶関数、奇関数それぞれの場合において、最低エネルギーに対応する波動関数を重ね合わせるにより、 $x > 0$ の領域に局在した状態を作ることができる。その状態が時間発展するとき、最初に $x < 0$ の領域に局在した状態になるまでの時間は、

$$T = \frac{m^2 v \ell^3}{\pi \hbar^3} \quad (3)$$

で与えられることを示せ。

第2問 統計力学

2つの異なる角振動数 ω_1, ω_2 をもつ調和振動子それぞれ N_1, N_2 個からなる系を考える。系の微視的状态は非負の整数の組 $N \equiv (m_1, m_2, \dots, m_{N_1}; n_1, n_2, \dots, n_{N_2})$ で指定され、系全体のエネルギーは、

$$E[N] = \sum_{i=1}^{N_1} \left(m_i + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_1 + \sum_{j=1}^{N_2} \left(n_j + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_2$$

で与えられる。このとき、以下の問に答えよ。

- (1) 温度が T のとき、系全体の分配関数 Z を求めよ。ただし、ボルツマン定数を k_B とするとき、分配関数は

$$Z = \sum_N \exp\left(-\frac{E[N]}{k_B T}\right)$$

と表され、和はすべての可能な非負の整数の組 N についてとる。

- (2) 温度が T のとき、系全体の内部エネルギー U を求めよ。
 (3) 系の比熱 C は温度 T の関数として

$$C = k_B \frac{1}{(k_B T)^2} \left[N_1 \frac{(\hbar\omega_1)^2 e^{\hbar\omega_1/k_B T}}{(e^{\hbar\omega_1/k_B T} - 1)^2} + N_2 \frac{(\hbar\omega_2)^2 e^{\hbar\omega_2/k_B T}}{(e^{\hbar\omega_2/k_B T} - 1)^2} \right]$$

となることを示せ。

- (4) $N_1 = N_2 = N/2, \omega_1 = \omega, \omega_2 = 10\omega$ のとき、 C/Nk_B の $k_B T/\hbar\omega \rightarrow 0$ および $k_B T/\hbar\omega \rightarrow \infty$ の極限での漸近形を求めよ。また、 C/Nk_B を $k_B T/\hbar\omega$ の関数として概形を図示せよ。
 (5) 絶縁体の比熱を理解したい。固体を、 N 個の原子が規則的に並んだ結晶と考える。固体中の原子間の相互作用を取り入れ、格子振動が波として伝わるような系としよう。このとき 3次元の結晶は、それぞれの波数ベクトル \mathbf{k} に応じた角振動数 $\omega = c|\mathbf{k}|$ をもつ調和振動子（振動モード）の集まりと考えられる（ c は音速）。波数の絶対値が $k = |\mathbf{k}|$ より小さい振動モードの数は

$$3 \frac{(4\pi/3)k^3}{(2\pi/L)^3}$$

と書ける（ L は系の 1 辺の長さ、全体の係数 3 は横波 2 成分と縦波 1 成分の和）。波数の最大値を k_D とするとき、系の比熱を表す式を k に関する積分の形で導け。また、比熱は低温では T^3 に比例することを示せ。

第3問 電磁気学

図1に示すような、2つの同軸導体円筒でできたコンデンサを考える。長さ l はそれぞれの円筒の半径 a, b に比べて十分に長い($l \gg a, b$)ものとする。このコンデンサを真空中に設置し、外円筒を接地し、内円筒に $+Q$ の正電荷を与えたとき、以下の問いに答えよ。

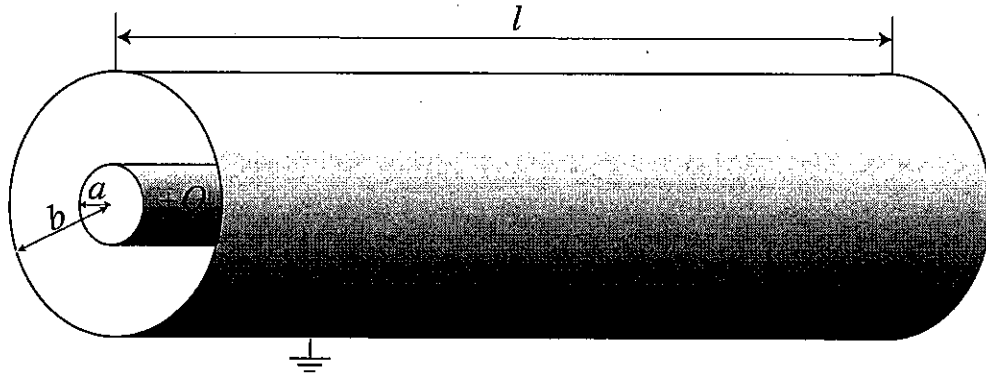


図 1:

設問1 中心から距離 r ($a < r < b$)における電場の大きさ $E(r)$ をガウスの定理を用いて求めよ。

ガウスの定理: 一つの閉曲面 S 内の総電荷を Q とすると、 E_n を面要素 dS のところの外向き法線方向への電場 E の成分として、閉曲面 S 上で積分すると、

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_S E_n dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

となる。即ち、曲面を出て行く電気力線の総数が電荷の総和を ϵ_0 で割ったものになる。

設問2 設問1で求めた電場を、 r に対して内円筒から外円筒まで積分することにより、2つの円筒間に生じる電位差 V を求めよ。

設問3 コンデンサの静電容量 C を求めよ。

設問4 コンデンサに蓄えられる静電エネルギー U を a, b, l, Q で表せ。

さて、上記のコンデンサの内部(内円筒と外円筒の間の空間)をガスで満たしたとき、図2に示すように、このコンデンサの内部の $r = r_0$ ($a < r_0 < b$)において電離が生じ、正負の点電荷 $\pm q$ ($q \ll Q$)が生じたとする。負電荷は内円筒に向かって移動し、正電荷は外円筒に向かって移動する。簡単のためにガスの誘電率は ϵ_0 とする。また、正電荷の移動速度は負電荷に対して無視できるほど遅く、負電荷が移動している間、正電荷は電離した地点にとどまっているとする。

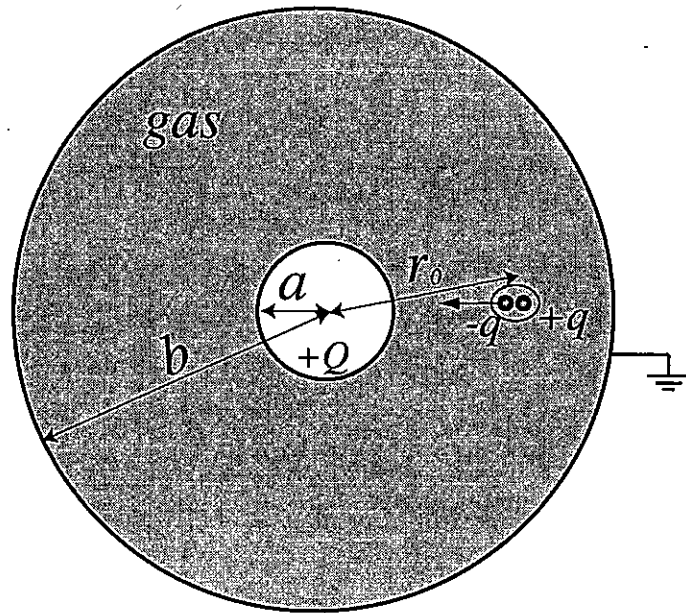


図 2:

設問 5 負電荷が中心からの距離 r_0 から r_1 ($a < r_1 < r_0$) に移動した時に、負電荷が電場により得るエネルギーを求めよ。

設問 6 負電荷が移動すると、コンデンサの電位差 V に変化が生じる。静電エネルギーの変化量と設問 5 で求めたエネルギーの変化量の和が保存することを用いて、負電荷が内円筒に達したとき ($r_1 = a$) の電位差の変化 ΔV を C, a, b, r_0, q で表せ。ただし、 ΔV は V に比べて十分に小さいものとする。また、 $r_0 = a$ および $r_0 = b$ の場合について、 ΔV を計算し、その結果を考察せよ。

第4問 力学

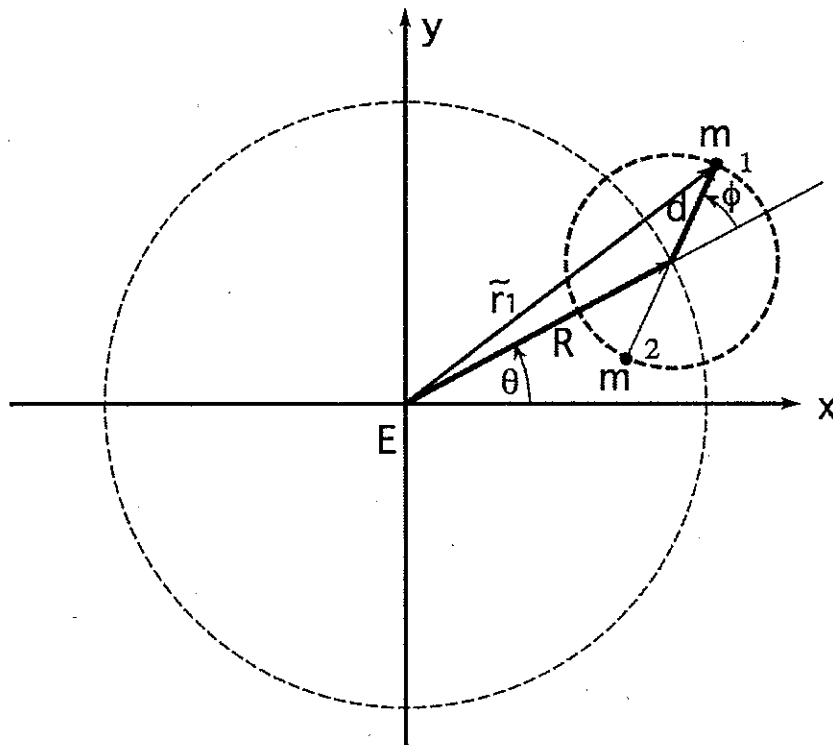
地球を回る宇宙ステーションの中でのダンベルの運動

宇宙ステーションの中では地球の重力と遠心力とが釣り合っていて無重力であると一般の人には信じられているが、地球の重力が非線形であることにより微小な加速度が消去されずに残る。そこで、この微小加速度*の効果をみてみることにする。

宇宙ステーションが地球中心を中心とした完全な円軌道を一定の回転（公転）角周波数 Ω で運行すると仮定し、宇宙ステーションに中心を拘束されたダンベルの運動を調べてみる。ダンベルとは、質量が無視できる長さ $2d$ の棒の両端に質量 m の質点が固定されているものとする。さらに、棒の中央は摩擦のない回転軸によって宇宙ステーションの中心に固定され、宇宙ステーションの軌道平面内でのみ回転できるものとする。簡単にするために、ダンベルの質量は宇宙ステーションの質量と比べて無視でき、さらに宇宙ステーションの質量は宇宙ステーションの中心に集中しているものとし、かつ地球質量と比べて無視できるとする。また、ダンベルの棒の長さは宇宙ステーションの軌道半径と比べて微小量であるとする。

図で示すように、宇宙ステーションの軌道半径、回転角を R 、 $\theta (= \Omega t)$ とし、ダンベルの回転角 ϕ を宇宙ステーションの回転角から測るようになる。

(* : 太陽や月からの重力の主要な非線形項は、地球上では潮汐力として観測される。ここでは宇宙ステーションの中で消去されずに残る、地球からの潮汐力を扱うことになる。)



[問1] 宇宙ステーション軌道上での地球による重力加速度が、定数 $g(>0)$ を使って、 $\frac{g}{R^2}$ と表されるものとする。重力と遠心力の釣り合い条件から、宇宙ステーションの回転角周波数 Ω を求めよ。

[問2] 計算を容易にするために、ダンベルの両端の質量の位置を複素表示で表すことにする。複素表示とは、座標 (x,y) で表される位置を一つの複素数 $(x+iy)$ に対応させることである。

質点の座標をまず求め、それを複素表示の実部と虚部を比較することによって、両端にある二つの質点それぞれの位置が複素表示では、

$$\begin{aligned}\tilde{r}_1 &= R e^{i\theta} + d e^{i(\theta+\phi)} = R e^{i\theta} \left(1 + \frac{d}{R} e^{i\phi}\right), \\ \tilde{r}_2 &= R e^{i\theta} - d e^{i(\theta+\phi)} = R e^{i\theta} \left(1 - \frac{d}{R} e^{i\phi}\right)\end{aligned}$$

と書けることを示せ。

[問3] \tilde{r}_1 にある質点のポテンシャルエネルギー U_1 は [問1] で導入した定数 $g(>0)$ を使って、 $U_1 = -m \frac{g}{r_1}$ と表される。ただし、距離 r_1 は \tilde{r}_1 の

絶対値で与えられ、複素共役を使うと、 $r_1 = |\tilde{r}_1| = \sqrt{\tilde{r}_1 \cdot \tilde{r}_1^*}$ となる。

d/R が微小量であるとして、ポテンシャルエネルギー U_1 を d/R でベキ

展開し、 d/R の2次まで求めよ。

[問4] \tilde{r}_1 にある質点の運動エネルギー T_1 は、複素表示では

$$T_1 = \frac{m}{2} \left| \frac{d\tilde{r}_1}{dt} \right|^2 = \frac{m}{2} \frac{d\tilde{r}_1}{dt} \cdot \frac{d\tilde{r}_1^*}{dt} \text{ となる。}$$

\tilde{r}_1 と \tilde{r}_2 にある二つの質点から構成されるダンベルの Lagrangian $L(\phi, \frac{d\phi}{dt})$

を d/R の2次まで求め、

$$L(\phi, \frac{d\phi}{dt}) = mR^2 \Omega^2 + md^2 \left(\Omega + \frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \frac{2mg}{R} \left(1 - \frac{d^2}{2R^2} (1 - 3 \cos^2 \phi) \right)$$

となることを示せ。ただし、定数項は除いてもよい。

[問5] ϕ についての運動方程式を導け.

[問6] $\phi = 0$ の周りで運動方程式を展開し、微小変位の場合には $\phi = 0$ の周りで安定な単振動になることを示し、その振動の角振動数 ω を求めよ.
さらに、 Ω との関係を求めよ.

[問7] [問5]で求めた ϕ についての運動方程式の平衡解(定数解)は $\pi/2$ の整数倍であることを示せ. $\phi = 0$ は安定な平衡解であったが、さらに $\phi = \frac{\pi}{2}$ の解の周りの安定性を議論せよ.

第5問 実験物理 I

光電子増倍管においては通常信号増幅部分の回路を強磁性体で囲って内部への磁力線の侵入を防ぐ（磁気遮蔽をする）工夫がされている。これは磁力線が透磁率の高い材料内を通り易いという性質を利用するものである。

ここでは、ある材料（円環試料）の磁化特性(B - H 特性：図1)を測定しこの材料がある強さの磁場中での磁気遮蔽材として適当かどうかを調べる実験について考える。

磁性体の円環試料に図2の様にコイルを巻く。点線で表した円環の平均の長さを L [m]、電流を I [A]、全巻数を N とした時、

- 1) 実線矢印で示された円環内部の磁界 H の大きさを求めよ。
- 2) 点線矢印（円環の中心）では紙面に垂直方向の磁場が発生する。その大きさを評価するためこのコイルに流れる電流を平均半径 $L/2\pi$ [m] の円電流と近似して円の中心に作る磁界 H の大きさを求めよ。

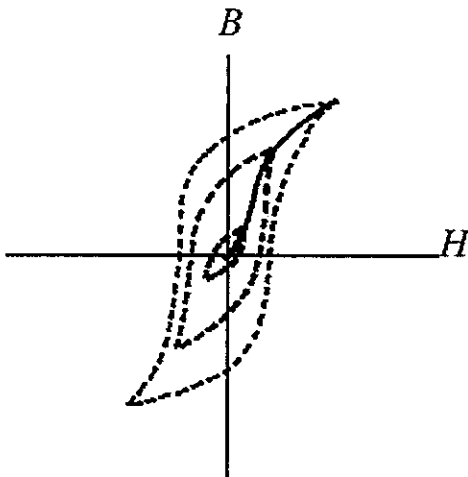


図1

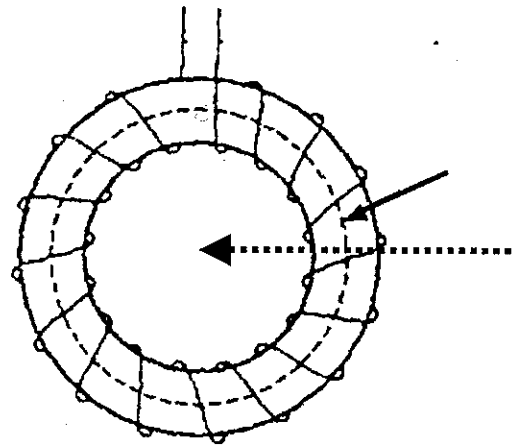


図2

図3は円環試料 A の磁気特性を測定する実験のセットアップである。なおこの円環の平均長、断面積、一次コイル巻数、二次コイル巻数をそれぞれ L 、 S 、 N_1 、 N_2 とする。

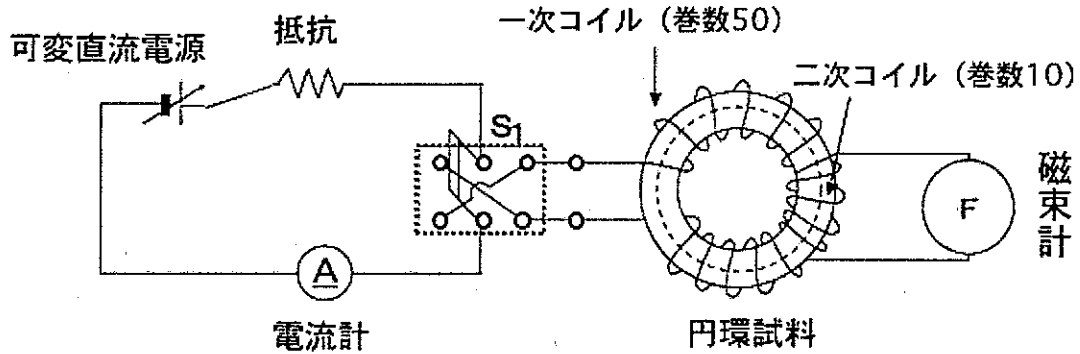


図3 磁化特性測定実験のセットアップ

【概要】

・一次コイルの電流変化により発生した磁束変化を二次コイルにより検出する。磁束変化は磁束計の針の振れ幅として測定される。実験の開始時試料は図1の原点の状態にあるものとする。

【手順】

- ・一次コイルに電流 I [A] を流しスイッチにより電流を反転する。この時の磁束計の指針の振れ幅 Δx [m] を記録してから電流をゼロに戻す。
- ・次に別の電流値（但し前回の電流よりは大きな値）をセットし同様の実験を繰り返す。

3) 一次コイルの電流を I [A] \rightarrow $-I$ [A] と変化させた場合に円環試料内に生じる磁束密度変化が ΔB であった。二次コイルで検出される磁束変化 $\Delta\phi$ を表せ。

4) 磁束計の校正の結果、磁束変化 $\Delta\phi$ と振れ幅 Δx の間に以下の関係があることがわかった。これを使って表1の(ア)～(ケ)を埋めよ。なお計算には必要に応じて $L=0.125$ [m]、 $S=3.0 \times 10^{-5}$ [m²]、 $N_1=50$ 、 $N_2=10$ 、 $\mu_0=4\pi \times 10^{-7}$ [H/m]、 $B=\mu_0\mu_r H$ を使え (μ_0 : 真空透磁率、 μ_r : 比透磁率)。

$$\Delta\phi \text{ [Wb]} = 2.5 \times 10^{-4} \Delta x \text{ [m]}$$

I [A]	Δx [m]	H [A/m]	B [T]	μ_r (比透磁率)
0.05	7.0×10^{-3}	(ア)	(イ)	(ウ)
0.10	2.0×10^{-2}	(エ)	(オ)	(カ)
0.20	7.4×10^{-2}	(キ)	(ク)	(ケ)

表1

この実験を別の円環試料 B について行い比透磁率 μ_r を求めたところ図4のような結果を得た。

- 5) 光電子増倍管を使う実験室のバックグラウンド磁場の大きさがおよそ 5×10^{-5} [T]であった。この場合増幅部分の回路の磁気遮蔽材として適しているのは試料 A, B のどちらか？ またその理由も述べよ。
- 6) 実験室の環境においてバックグラウンド磁場の原因となりうるものを挙げよ。

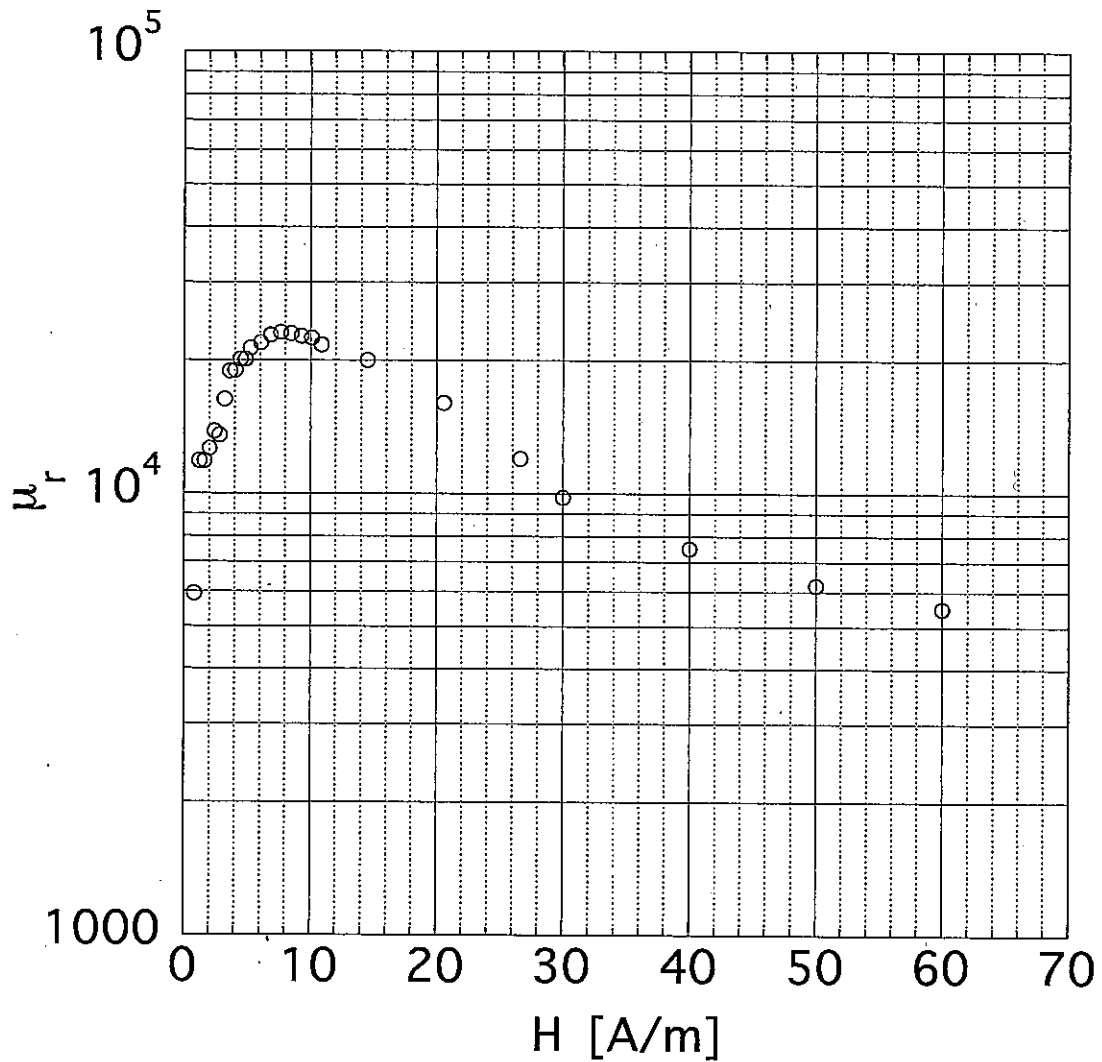


図4 試料 B の比透磁率曲線

第6問 実験物理Ⅱ

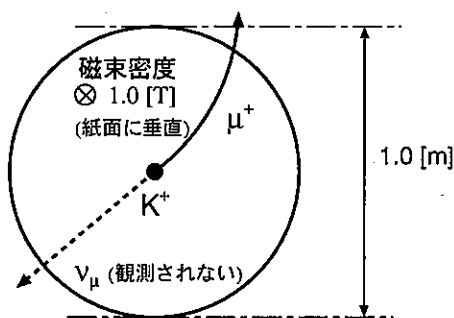
荷電 K 中間子 (K^+) はさまざまな終状態に崩壊する。 K^+ 中間子崩壊に関する実験について、以下の設問に答えよ。数値での解答は有効数字 2 桁とする。

[問1] K^+ の崩壊過程について、エネルギー E 、運動量 \vec{p} 、質量 m の関係 $E^2 = |\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4$ 、およびエネルギーと運動量の保存則を考える。

1. 実験室系で静止している K^+ 中間子が μ 粒子 (μ^+) とニュートリノ (ν_μ) に二体崩壊した場合の μ^+ の運動量を求めよ。
2. 実験室系で静止している K^+ 中間子が荷電 π 中間子 (π^+) と 2 つの中性 π 中間子 (π^0) に三体崩壊した場合に、 π^+ の運動量が最小値および最大値となるのはどのような場合か図示せよ。またそのときの π^+ の運動量を求めよ。

これらの崩壊にかかわる粒子の質量は、それぞれ $m(K^+) = 0.50$ [GeV/ c^2]、 $m(\pi^+) = m(\pi^0) = 0.14$ [GeV/ c^2]、 $m(\mu^+) = 0.10$ [GeV/ c^2]、 $m(\nu_\mu) = 0$ とする (c は光の速度)。

[問2] 電荷 $+e$ の荷電 μ 粒子 (μ^+) の運動量 p は、磁場 (磁束密度 B) 中の粒子がローレンツ力により描く半径 $r = \frac{p}{eB}$ の円弧の飛跡の測定から求めることができる。例えば図のように一様磁束密度 $B = 1.0$ [T] の中で K^+ 中間子の崩壊点のまわりに同心円筒状で最外層の直径 1.0 [m] の位置検出器を配置する。



μ^+ がこの検出器の最外層まで到達するために必要な運動量の紙面と平行な成分 (p_T) の最小値を [MeV/ c] 単位で求めよ。検出器等による運動量損失は無視できるものとする。素電荷 $e = 1.6 \times 10^{-19}$ [C]、光速 $c = 3.0 \times 10^8$ [m/s]、磁束密度 1 [T] = 1 [N · A⁻¹ · m⁻¹]、電荷 1 [C] = 1 [A · s]、エネルギー 1 [eV] = 1.6 × 10⁻¹⁹ [J] を使用してよい。

[問3] 静止している K^+ の崩壊により生成される π^0 は、ただちに 20 ~ 200 MeV のエネルギーを持つ光子 2 個に崩壊する。光子は電荷をもたないため、磁場を用いた運動量測定は出来ない。この光子のエネルギーと運動量ベクトルを測定する方法について説明せよ。

[問4] K^+ はさまざまな粒子の組み合わせに崩壊することができるが、ある特定の粒子の組み合わせへの崩壊過程の起きる割合 (これを分岐比と呼ぶ) は、崩壊過程を理解するために重要な測定量である。例えば、 K^+ が π^0 、 μ^+ 、 ν_μ へ三体崩壊する分岐比は、これらのうち π^0 と μ^+ を同時に検出した数を計数することで求めることができる (ν_μ は測定できないが構わない)。このときの測定誤差について、以下の問いに答えよ。事象数の計数が N のときに、真の値の推定値 N の統計誤差は \sqrt{N} で与えられる。

1. 検出効率 100% かつバックグラウンド事象を考慮しない場合、3.3% の分岐比で三体崩壊する分岐比の測定の統計誤差を 10% 以下とするために必要な初期状態の K^+ 中間子の事象数を求めよ。
2. 初期状態の K^+ 中間子が 10000 事象であるとする。 π^0 、 μ^+ 、 ν_μ への三体崩壊を測定したところ、225 事象観測された。このうち、バックグラウンド事象はあらかじめ 60 ± 20 事象含まれていることがわかっていることとする。 π^0 、 μ^+ 、 ν_μ への三体崩壊の検出効率が 50% のとき、測定された分岐比を求めよ (ここでは運動量依存性や角度依存性は考慮しない)。また、分岐比の測定誤差が何% となるか、誤差の伝播を用いて求めよ。

第7問 物質科学

問題 1. 次にあげる実験手法について 2 つ選び、測定原理、測定対象物質、どのような情報が得られるかを述べよ。

- (1) 光電子分光、(2) X 線磁気円二色性、(3) X 線吸収微細構造 (EXAFS)、
- (4) 蛍光 X 線分析、(5) X 線あるいは中性子回折、
- (6) X 線あるいは中性子小角散乱、(7) X 線あるいは中性子反射率、
- (8) ミュオンスピン回転 (μ SR)、(9) 陽電子消滅、(10) X 線イメージング

問題 2

(1) 自由電子のシュレーディンガー方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) = \varepsilon\psi(\mathbf{r}) \quad (2.1)$$

と表せる。ここで、 m は電子の質量、 \hbar はプランク定数、 ε はエネルギー固有値である。また、系は一辺が L の立方体である。

平面波 ($\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{L^3}}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$, $\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$) が式(2.1)を満たすことを示せ。

(2) $L \rightarrow \infty$ での振る舞いを知ることを目的として、周期的境界条件を次のように課す。

$$\psi(x, y, z) = \psi(x + L, y, z) = \psi(x, y + L, z) = \psi(x, y, z + L)$$

平面波 ($\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{L^3}}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$) にこの周期的境界条件を課すと $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$

はどのように表せるか。

また、 $L \rightarrow \infty$ では \mathbf{k} の値はどうか。

(3) 基底状態を得るには、電子をパウリの原理に従って詰める。

パウリの原理について説明せよ。

- (4) 固体内の自由電子の状態密度について考える。温度 0 K で、エネルギー ε 以下の状態にある状態の数 N を考えてみると、

$$N = 2 \cdot \frac{4\pi}{3} k^3 \frac{L^3}{(2\pi)^3}$$

と表すことが出来る。ただし、 ε はフェルミエネルギーより小さいとする。エネルギー ε と $\varepsilon + d\varepsilon$ の間の状態にある状態の数は、状態密度 $D(\varepsilon)$ を用いて $D(\varepsilon) d\varepsilon$ と表せる。

状態密度 $D(\varepsilon)$ を求め、エネルギー ε と $D(\varepsilon)$ との関係を図示せよ。

- (5) 最近のナノテクノロジーの進展により、固体中の自由電子を低次元系に閉じ込めることが可能になった。そこで、低次元系における自由電子の振る舞いについて考えてみよう。

2次元系における状態密度 $D(\varepsilon)$ を求め、エネルギー ε と $D(\varepsilon)$ との関係を図示せよ。

- (6) 自由電子の有限温度での振る舞いについて考える。

縮退したフェルミ粒子系において、系の内部エネルギー U は T がフェルミ温度 ($T_F = \frac{\varepsilon_F}{k_B}$) より十分小さいときに、 T の2次まで展開すると

$$U(T) = U(0) + D(\varepsilon_F) \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 + \dots$$

となることを用いて、低温での自由電子による比熱を求めよ。