

総合研究大学院大学高エネルギー加速器科学研究科

5年一貫制博士課程入学試験問題

英語・数学

平成18年8月31日（木） 10時00分～12時00分

注意

- ☆ 答案用紙の所定の欄に、受験番号、氏名を記入すること。
- ☆ 各自に計算用紙1枚が配布されていることを確認すること。
- ☆ 英語（2問）と数学（3問）の試験問題ごとに、異なった答案用紙を使用すること。
- ☆ 各問題に対して、答案用紙は複数使用してよいが、第〇〇問□□枚目というように、所定の欄に、選択した問題の番号及び答案用紙の順番を記入すること。

英語

第 1 問 以下の英文を和訳せよ。逐語訳ではなく意識とし、全体として意味のわかる文にせよ。ただし、固有名詞と判断されるものについては原文のまま記してよい。

Einstein's general theory of relativity might be over 90 years old, but it is only recently that many of its implications can be explored thanks to advances in computing power. This is because its complex nonlinear equations — which describe how space-time is curved by matter and therefore how matter moves in a gravitational field — cannot be solved exactly, even for the simplest situations.

Now, Joan Centrella and co-workers at NASA's Goddard Space Flight Center have made an important breakthrough in numerical relativity by simulating what happens when two black holes merge. These extraordinarily powerful events, which occur in the final stages of a galactic collision, produce copious gravitational waves or "ripples" in space-time.

A central prediction of general relativity, gravitational waves are yet to be detected directly. But the new NASA simulation reveals precisely what the gravitational wave signature will look like for a specific astrophysical process.

出展 <http://physicsweb.org/articles/news/10/4/8/1>
by *Matthew Chalmers*

語彙

numerical relativity : 数値相対論

copious : たくさんの、おびただしい

第 2 問 次の和文を英訳せよ。意識でかまわないが、内容がはっきり伝わるように留意せよ。

1960年代、日本は高いレベルの科学技術に基づいて経済力をつけるため、理科系の学生数を飛躍的に増やす政策をとった。この努力もあり、日本は高い技術力に基礎をおく経済大国になった。その結果、諸外国では「メイド イン ジャパン」の表示の意味が「安物」のイメージから「高級品」のイメージと変わったのである。ところが、それから数十年後の今日、日本の社会では、理科系の科目に興味をもつ学生の割合が減っていることが指摘されている。最近、韓国、台湾、インドなどが技術力をあげている現代の情勢を考慮して、再び科学や技術に関心を抱く学生が増えることを望む声が多い。

数学

第1問

1. 領域 $-\pi$ から π の間で定義された関数

$$f(x) = x^2 \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

は、周期 2π をもつ関数と考えると、定義域を $-\infty$ から ∞ の領域へ拡張することができる。拡張された関数をグラフに図示せよ。

2. 次の関係式を証明せよ。(但し n, m は正整数)

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \sin(nx) \sin(mx) = \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos(nx) \cos(mx) = \pi \delta_{nm}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \sin(nx) \cos(mx) = 0$$

3. 1. の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx))$$

の形のフーリエ級数に展開した時の各係数の値を求めよ。

4. この展開を使って次の等式を証明せよ。

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

第2問

ユニタリ行列とは関係式 $MM^\dagger = 1$ を満たす行列である。一般にユニタリ行列 M は、別のあるユニタリ行列 U を使って UMU^\dagger と変換すると、次のように対角行列 D に変換することができる。

$$UMU^\dagger = D.$$

1. ユニタリ行列の固有値は複素平面上で半径1の円周上にあること示せ。
2. 次の3行3列の行列

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

に対して M^n を計算せよ。但し n は整数。

3. 2. の3行3列の行列の固有値と大きさ1に規格化された固有ベクトルを求めよ。

第3問

時刻 t での位置を $x(t)$ とした時、位置 $x(t)$ に関する微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = 0$$

の一般解を求めたい。但し γ と ω_0 は正の実数とする。

1. 解の形を $x(t) = \exp(\lambda t)$ とおいた時 λ のとりうる値を求めよ。
2. $\gamma \neq \omega_0$ の場合の一般解を求めよ。 γ と ω_0 の大小に応じた解の振る舞いを図示せよ。
3. 係数 γ と ω_0 が等しい場合は注意が必要である。 $\gamma = \omega_0 + \epsilon$ とおいて $\epsilon \rightarrow 0$ の極限をとることにより、この場合の一般解を求めよ。

総合研究大学院大学高エネルギー加速器科学研究科

5年一貫制博士課程入学試験問題

物理学

平成18年8月31日(木) 13時00分～16時00分

注意

☆ 答案用紙の所定の欄に、受験番号、氏名を記入すること。

☆ 各自に計算用紙1枚が配布されていることを確認すること。

☆ 8問の中から、4問を選んで解答せよ。

ただし、素粒子原子核理論分野を第1志望とする受験者は、

第1問(量子力学)を必ず選択しなければならない。

☆ 選択した問題ごとに、異なった答案用紙を使用すること。

☆ 各問題に対して、答案用紙は複数使用してよいが、第〇〇問□□

枚目というように、所定の欄に、選択した問題の番号及び答案用紙の順番を記入すること。

第1問 量子力学

1. 電子のスピンは、 $S_i = (\hbar/2) \sigma^i$ ($i=1,2,3$) と以下のパウリ行列 σ^i を用いて表示される。

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- (1) S_3 の固有値と規格化された固有状態を求めよ。
- (2) S_1 の固有値と規格化された固有状態を求めよ。
- (3) 第3軸方向に磁場 B が存在すると、電子のスピンは以下のハミルトニアンに従って変化する。 μ_B の名称を解答し、基本的物理量で表示せよ。電子の質量を m 、電子の素電荷を $-e$ 、光速を c とせよ。

$$H = \mu_B B \sigma^3$$

- (4) このハミルトニアンに従う一般的な2成分波動関数の時間発展を求め、 S_3 の期待値 $\langle t | S_3 | t \rangle$ が時間 t によらないことを示せ。その物理的理由を説明せよ。
- (5) S_1 の期待値の時間依存性 $\langle t | S_1 | t \rangle$ を求めよ。ただし $|t\rangle$ は、 $t=0$ において S_1 の固有値 $\hbar/2$ の固有状態であったとする。
2. 一次元空間を運動する質量 m の電子が無限に高いポテンシャルの壁によって $-L/2 < x < L/2$ の領域に閉じ込められている場合を考える。
- (1) 電子の基底状態と第一励起状態のエネルギー固有値と規格化された固有状態を求めよ。

- (2) 電子を最初のポテンシャルの基底状態に用意したとせよ。ポテンシャルの壁に囲まれた領域が図1の様に $-L < x < L$ の領域に瞬間的に拡大した後、電子のエネルギーを測定した。そのとき電子が新しいポテンシャルに対する最低エネルギー固有状態に見出される確率を求めよ。
- (3) 同じ操作の後、電子が新しいポテンシャルに対する第一励起状態に見出される確率を求め、その物理的理由を説明せよ。
- (4) 同じ操作を十分ゆっくり行くと、電子は新しいポテンシャルの最低エネルギー固有状態に常に見出される。その理由を説明しポテンシャル変化の速さに対する条件を求めよ。

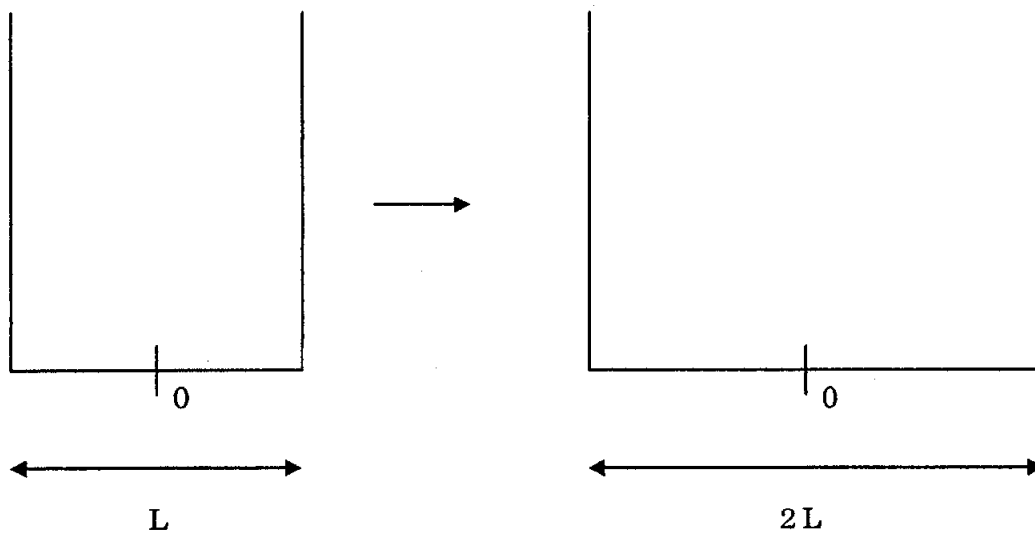


図1 無限に高いポテンシャルの壁によって囲まれた領域が、2倍の幅を持つ領域に拡大

第2問 統計力学

1次元イジング模型はハミルトニアン

$$H = -J \sum_{j=1}^N \sigma_j \sigma_{j+1} \quad (1)$$

によって定義される。ここでスピン σ_j ($j = 1, \dots, N$) は ± 1 をとる変数で、周期的境界条件 $\sigma_{N+1} = \sigma_1$ を課してあるものとする。簡単のためサイト数 N が偶数の場合限定してよい。以下の設問に答えよ。

[1] 隣りあうサイト上のスピンの逆符号になっている箇所が k 箇所あるとすると、エネルギーは

$$E = J(2k - N) \quad (2)$$

で与えられる事を示せ。ここで k はどのような値をとりうるか、周期的境界条件が課せられている事に留意して答えよ。

[2] エネルギーを式(2)のように指定したとき、対応する状態数が

$$\mathcal{N}(E) = 2 \times {}_N C_k \quad (3)$$

で与えられる事を示せ。

[3] 式(3)で与えられる状態数を用いて、エントロピーは

$$S(E) = k_B \log \mathcal{N}(E) \quad (k_B \text{ はボルツマン定数}) \quad (4)$$

と定義できる。また、エネルギー密度とエントロピー密度をそれぞれ $\varepsilon = \frac{E}{N}$, $s = \frac{S}{N}$ と定義する。 $|\varepsilon| < |J|$ の場合に $N \rightarrow \infty$ の極限をとると、 s を ε で表わす表式として

$$s(\varepsilon) \simeq k_B \left[\log 2 - \left\{ f\left(\frac{\varepsilon}{J}\right) + f\left(-\frac{\varepsilon}{J}\right) \right\} \right] \quad (5)$$

が得られる。但し $f(x) = \frac{1}{2}(1+x) \log(1+x)$ を定義した。 N が大きいときに成立するスターリングの公式 $\log(N!) \simeq N \log N - N$ を用いて式(5)を導け。

[4] 式(5)で与えられるエントロピー密度 $s(\varepsilon)$ を用いて、温度は

$$\frac{1}{T} = \frac{ds(\varepsilon)}{d\varepsilon} \quad (6)$$

により定義できる。 $N \rightarrow \infty$ の極限において ε を T の関数として求めよ。

[5] 上記 [3],[4] で考えた熱力学的諸量の定義は、孤立系に対するミクロカノニカル・アンサンブルに基づいている。一方、温度 T の熱浴と接した系に対するカノニカル・アンサンブルにおいては、エネルギーの値を指定せずに全ての状態を考え、その代わりに各状態に対してボルツマン・ウェイト $e^{-\beta H}$ を付与する。ここで $\beta = \frac{1}{k_B T}$ を定義した。ハミルトニアン (1) に対して、

$$e^{-\beta H} = \prod_{i=1}^N \left\{ \cosh(\beta J) + \sinh(\beta J) \sigma_i \sigma_{i+1} \right\} \quad (7)$$

を示せ。

[6] カノニカル・アンサンブルにおいては、分配関数

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta H} \quad (8)$$

が基本的な役割を果たす。但し、式 (8) の右辺に現れる和 $\sum_{\{\sigma\}}$ は、 2^N 個の全ての状態 $\{\sigma\}$ についてとることを意味する。今考えている系の場合、式 (7) を用いて、分配関数が

$$Z = 2^N \cdot \left[\left\{ \cosh(\beta J) \right\}^N + \left\{ \sinh(\beta J) \right\}^N \right] \quad (9)$$

で与えられる事を示せ。又 $T > 0$ の場合について、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log Z = \log \cosh(\beta J) + \log 2 \quad (10)$$

を示せ。

[7] カノニカル・アンサンブルにおけるエネルギーの平均値

$$\bar{E} = \frac{1}{Z} \sum_{\{\sigma\}} H e^{-\beta H} \quad (11)$$

が $\bar{E} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z$ と書ける事を示せ。又 $T > 0$ の場合について、式 (10) を用いて、エネルギー密度の平均値 $\bar{\varepsilon} = \frac{\bar{E}}{N}$ を $N \rightarrow \infty$ の極限で求めよ。又その結果を [4] の結果と比較して言える事は何か、述べよ。

第3問 電磁気学

MKSA 単位系を用いて以下の設問に答えよ。いずれも真空中の問題とし、重力も無視するものとする。

【1】半径 a の球内に一様な負電荷密度 $-\rho$ で電荷が分布しているとする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) この球の中心からの距離 r における電場を求めよ。

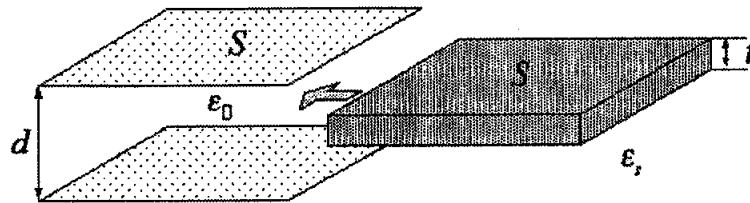
(2) 誘電率 ϵ の媒質中では、静電場エネルギー U は電場を \mathbf{E} として、

$$U = \frac{\epsilon}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV$$
 で表せる。これを用いて、この球のもつ静電場エネルギーを求めよ。真空の誘電率を ϵ_0 で表すこと。

よ。真空の誘電率を ϵ_0 で表すこと。

(3) この球のもつ全電荷量が電子のもつ電荷量 $-e$ に等しいとし、さらにその静電場エネルギーが電子のもつ静止エネルギー $m_0 c^2$ に等しいとするとき、半径 a を求めよ。

【2】下図に示すように、面積 S をもつ重なり合う平行平板電極（完全導体）と電極と同じ面積 S をもつ誘電体（厚さ t 、誘電率 ϵ_s 、また $\epsilon_s > \epsilon_0$ とする）を考える。なお、平行平板電極間は間隔 d ($d > t$) で誘電率 ϵ_0 をもち、端部の効果が無視できる程度に電極面積が広いものとする。



(1) 電極のみの系において、上下の電極間に定電圧電源により電圧 V をかけたとき、この系に蓄積される静電場エネルギーを求めよ。

(2) ここで、電圧をかけている定電圧電源を外し、誘電体を電極間の中心付近に電極と平行に挿入する。電極と誘電体が丁度重なる位置まで挿入したとき、誘電体内の静電場エネルギーを求めよ。なお電荷は逃げないものとする。

(3) (2) とおなじ条件における誘電体以外の空間の静電場エネルギーをもとめよ。

(4) (2) の条件の時、誘電体表面にかかる力の向きと大きさを求めよ。

第4問 力学

問 1

図1に示すように、長さ l の糸の一端を静止した点 A に固定し、他端に質量 m のおもりをつるす。重力の働く方向を鉛直方向と定義し、重力加速度は g とする。おもりは糸がたるまない状態で鉛直面内で振り子運動をしている。このとき糸が鉛直方向に対してなす角を ϕ とする。おもりの運動は空気抵抗などの影響は受けないものとする。また糸の質量は無視できる。以下の設問に答えよ。

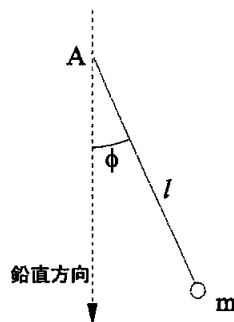


図 1

1. おもりに働く力を分析し、運動方程式が

$$\ddot{\phi} \equiv \frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \phi \quad (1)$$

となることを示せ。

2. おもりの微小な振動の周期が $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ で与えられることを示せ。
3. この系の運動エネルギーと位置エネルギーを ϕ を用いて表せ。ただし位置エネルギーは振り子運動の最下点を 0 とする。
4. 前問で求めた運動エネルギーと位置エネルギーから Lagrange 関数を求め、それを用いて運動方程式を導出し、式 (1) と同じになることを示せ。

問 2

地球の表面において質量 m の質点の運動を観察する。この様子を図 2 に示す。地球中心 O から観察している系の原点 P へのベクトルを \vec{r}_0 、質点の位置 Q へのベクトルを \vec{r} で示す。これらは地軸の回りを角速度ベクトル $\vec{\omega}$ で回転しており、その角速度 ω は一定である。図中の $\vec{\rho}_0$ は、地軸に直交し地軸から原点 P に向かうベクトルである。観察する系の座標軸は原点 P を中心に、 x 軸は南方へ、 y 軸は東方へ、 z 軸は地球中心 O から P を結んで上方にとる。また z 軸と赤道面のなす角 (緯度) を λ とする。なお地球は完全な球であるとし、公転の影響は無視できるものとする。以下の設問に答えよ。

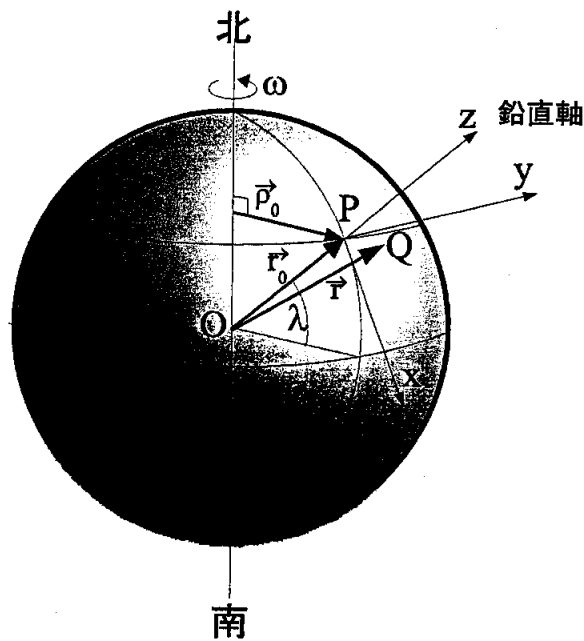


図 2

1. 慣性系において速度 \vec{v} 、加速度 \vec{a} をもって運動している質点を、慣性系と原点を共有し、角速度ベクトル $\vec{\omega}$ の回りを一定速度で回転する系で観察する。この時回転する系における質点の位置、速度、加速度をそれぞれ \vec{r}' 、 \vec{v}' 、 \vec{a}' とおいたとき、慣性系における速度 \vec{v} を \vec{r}' 、 \vec{v}' を用いて表せ。また慣性系における加速度 \vec{a} は

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \quad (2)$$

となることを示せ。

(ヒント: 質点の位置ベクトルを回転する系の座標軸方向の成分に分解して考えると解きやすい。)

2. 次に前問の回転する系の原点を図2に示す地球表面の点Pにとりなおす。Pは質点の位置Qに非常に近く、 $|\vec{r} - \vec{r}_0| \ll |\vec{r}_0|$ とする。この時慣性系において重力を含む外力 \vec{F} を受けて運動する質点の、地球表面における系での運動方程式は

$$m\vec{a}' = \vec{F} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' + m\omega^2 \vec{\rho}_0 \quad (3)$$

となることを示せ。また運動方程式に現れる第2項、第3項の力はそれぞれ何と呼ばれるか答えよ。

3. 運動方程式(3)を用いて、問1の振り子の微小運動を地球表面上で観察したときの運動方程式を x 軸および y 軸方向それぞれについて求めよ。重力は地球中心に向かって働くものとする。また、 ω^2 以上の高次の項は無視できるものとする。
4. この振り子の $x-y$ 平面内での軌跡を簡単な図を書いて示せ。また振り子の振動面が z 軸の回りに角速度 $-\omega \sin \lambda$ で回転することを示せ。ただし振り子ははじめに原点Pを通るように振らせるものとする。

第5問 物理化学

1. [量子化学]

1) 水素分子 (H_2) の座標を図1に示す。電子の質量を m_e 、電荷を $-e$ 、原子核 a、b が静止しているとして、ハミルトニアン \hat{H} を記述せよ。

2) 水素分子の波動関数 $\varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ を水素原子の原子軌道の波動関数 ($\phi_a(\vec{r}_1)$ と $\phi_b(\vec{r}_2)$) の積で近似することにする。電子1、電子2の同等性を考慮し、規格化された分子軌道の2つの解 $\varphi_+(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ (対称性軌道) と $\varphi_-(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ (反対称性軌道) を求めよ。ただし、スピン関数は考慮しないものとし、 $\phi_a(\vec{r}_1)$ と $\phi_b(\vec{r}_1)$ の重なり積分を

$$S \quad (S \equiv \int \phi_a(\vec{r}_1) \phi_b(\vec{r}_1) d\vec{r}_1) \text{ とする。}$$

3) 実際には電子は Fermi 粒子であるため、位置座標 (\vec{r}) とスピン座標 (σ) を含めた波動関数が電子の交換に対して反対称となることが必要である。そこで、上向きスピンの状態を α 、下向きスピンの状態を β として、2電子系のスピン関数を $\alpha(\sigma_1)\alpha(\sigma_2)$ 、 $\alpha(\sigma_1)\beta(\sigma_2)$ 、 $\beta(\sigma_1)\alpha(\sigma_2)$ 、 $\beta(\sigma_1)\beta(\sigma_2)$ の1次結合で表すこととする。一重項の全波動関数 ${}^1\Psi(\vec{r}_1, \sigma_1, \vec{r}_2, \sigma_2)$ 、三重項の全波動関数 ${}^3\Psi(\vec{r}_1, \sigma_1, \vec{r}_2, \sigma_2)$ を表せ。

4) ${}^1\Psi(\vec{r}_1, \sigma_1, \vec{r}_2, \sigma_2)$ 、 ${}^3\Psi(\vec{r}_1, \sigma_1, \vec{r}_2, \sigma_2)$ を用いてエネルギー期待値 1E 、 3E が次式で与えられることを示せ。

$${}^1E = 2E_{1s} + \frac{J+K}{1+S^2}, \quad {}^3E = 2E_{1s} + \frac{J-K}{1-S^2}$$

ただし、 E_{1s} は水素原子の 1s 軌道のエネルギー、 J はクーロン積分

$$(J \equiv \int \phi_a(\vec{r}_1) \phi_b(\vec{r}_2) \left[\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r_{a2}} - \frac{1}{r_{b1}} + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{R} \right) \right] \phi_a(\vec{r}_1) \phi_b(\vec{r}_2) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2), \quad K \text{ は交換積分}$$

$$(K \equiv \int \phi_a(\vec{r}_1) \phi_b(\vec{r}_2) \left[\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r_{a2}} - \frac{1}{r_{b1}} + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{R} \right) \right] \phi_a(\vec{r}_2) \phi_b(\vec{r}_1) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2) \text{ とする。}$$

5) 電子の同等性を考慮しない波動関数 $\varphi_0(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \phi(\vec{r}_1)\phi(\vec{r}_2)$ を用いた場合のエネルギー期待値 E_0 を求めよ。

6) 水素分子の核間距離 R を変えて 1E 、 3E 、 E_0 をプロットした曲線を図2に示す。3つの曲線 (A、B、C) のいずれが 1E 、 3E 、 E_0 に相当するか答えよ。

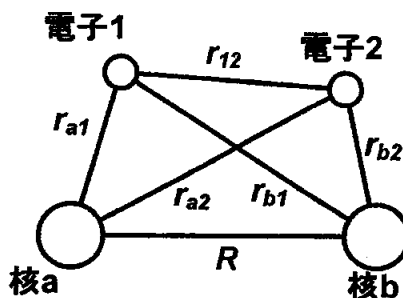


図1. 水素分子の座標。

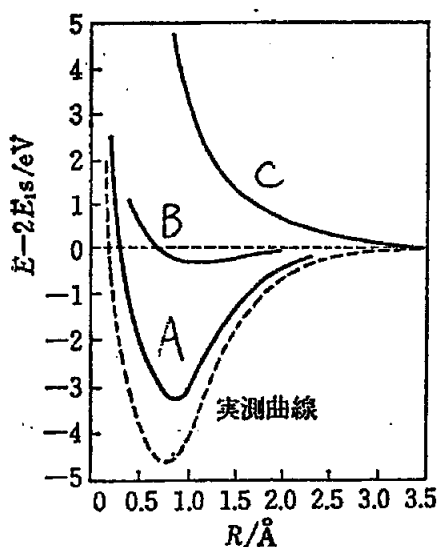


図2. 水素分子のポテンシャル曲線。

2. [分子軌道法]

水素分子の分子軌道 $1\sigma_g$ (結合性軌道) と $1\sigma_u$ (反結合性軌道) が水素原子の原子軌道 (1s) から構成される様子を図3のように模式的に表すことにする。同様に、LiH 分子の分子軌道 (1σ , 2σ , 3σ , 1π , 4σ) を Li の原子軌道 (1s, 2s, $2p_x$, $2p_y$, $2p_z$) と H の原子軌道 (1s) から構成される様子を模式的に表せ。ただし、Li と H の原子軌道を図4のように表すことにする。

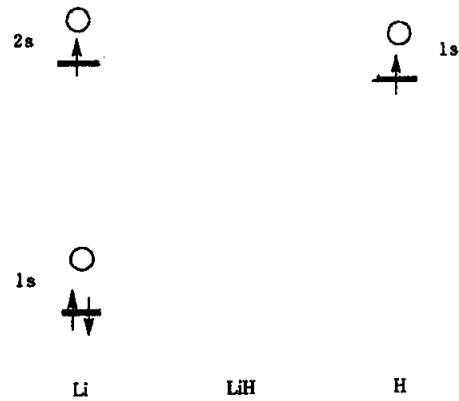
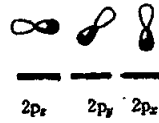
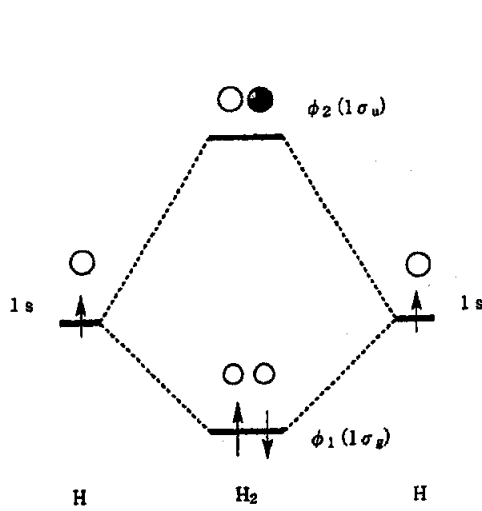
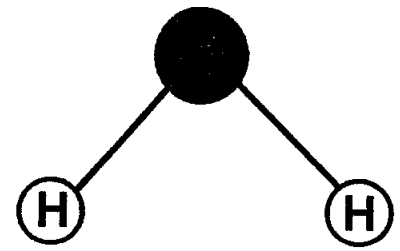
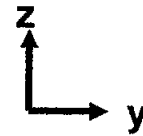


図3. 水素分子の分子軌道の構成。図の上下はエネルギーの高低を表す。分子軌道を構成する際の係数の符号は濃淡で区別し、係数の絶対値は原子軌道を表す図形の大きさに反映させている。矢印は電子、矢印の向きはスピンの向きを表す。

図4. LiH の原子軌道の模式図。図の上下はエネルギーの高低を表す。実際は Li 1s 軌道の準位はずっと深いが便宜的に浅く描いてある。結合軸方向を z 軸とした。

3. [対称性と群論]

水分子 (H_2O) は図に示すような非直線分子であり、対称要素として E 、 $C_2(z)$ 、 $\sigma_v(xz)$ 、 $\sigma_v'(yz)$ がある。以下の問いに答えよ。



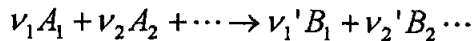
- 1) H_2O 分子が属する点群を記せ。
- 2) 対称要素 $C_2(z)$ 、 $\sigma_v(xz)$ 、 $\sigma_v'(yz)$ を図示せよ。
- 3) H_2O 分子の指標 (キャラクター) 表を下に示す。この指標表を完成せよ。

	E	$C_2(z)$	$\sigma_v(xz)$	$\sigma_v'(yz)$
A_1				1
A_2				-1
B_1				-1
B_2				1

- 4) H_2O 分子の z 方向に直線偏光した赤外線照射したとき、赤外線を吸収する振動モードはどの既約表現に属するか。理由も述べよ。

4. [化学反応論]

- 1) 化学反応は一般に



で表される。実験によって

$$-(1/\nu_i) \frac{d[A_i]}{dt} = k[A_1]^a [A_2]^b [A_3]^c \dots$$

なる反応速度式が得られたとき、この反応は A_1 について a 次、 A_2 について b 次、... であるという。ただし、 $[A_i]$ は A_i の濃度である。以下の問いに答えよ。

- 1-1) $A \rightarrow B$ なる化学反応がある。この反応が二次反応で、反応定数を k とするとき、 A の濃度 $[A]$ を時間 t の関数として表せ。
- 1-2) A の初濃度が C_0 であるとき、 A の半減期 (濃度 $[A]$ が半分になる時間) は 1 分であった。反応開始後 4 分における A の濃度を求めよ。

- 2) 速度定数 k はある程度の温度範囲では Arrhenius の式

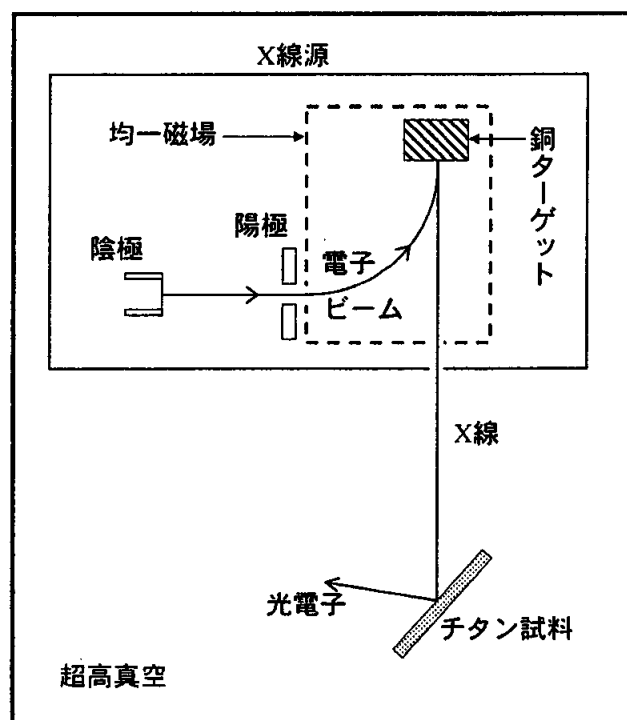
$$k = A \exp(-E_a / RT)$$

で与えられる。ここで R は気体定数で $8.315 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ である。そこで、 $A \rightarrow 2B$ なる反応において $\ln k$ を $1/T$ に対して $T=170 \sim 190^\circ \text{C}$ の範囲でプロットしたところ、直線に乗り、その勾配は -17522 K であった。以下の問いに答えよ。

- 2-1) この反応の E_a を有効数字 2 桁で求めよ。単位は kJ mol^{-1} の場合、 eV の場合のそれぞれについて記せ。ただし、電気素量は $1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ 、アボガドロ定数は $6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ とする。
- 2-2) E_a の名称を記せ。反応 $A \rightarrow 2B$ が発熱反応で、反応によって放出されるエネルギーを ΔU とするとき、反応座標ダイアグラム (横軸を反応進行度、縦軸を内部エネルギーとしてプロットした図) を描き、 E_a がどこに相当するか示せ。

第6問 実験物理 I

固体表面に光を照射した時、その表面からの電子放出現象が観測されることがあり、この時の入射光子数に対する放出電子数を量子効率と呼ぶ。今、図にあるような超高真空装置の中で、電子ビームを銅ターゲット表面に照射し、さらに発生した X 線をチタン表面に照射して、実験的にその量子効率を求めたい。以下の問いに答えよ。この問題で、電荷素量： $1.6 \times 10^{-19} \text{C}$ 、電子の静止質量： $9 \times 10^{-31} \text{kg}$ 、プランク定数： $6.6 \times 10^{-34} \text{Js}$ 、光の速度： $3 \times 10^8 \text{m/s}$ とする。なお、数値解答の有効数字は1桁とする。

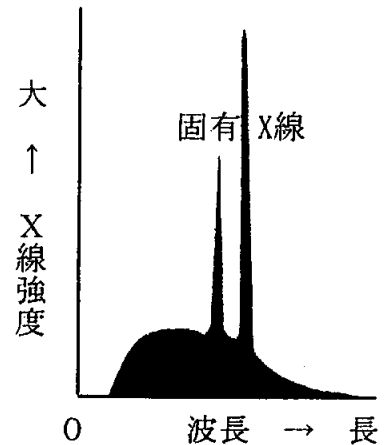


- 1) 光照射を受けた固体表面から電子が放出されるこの現象は、何と呼ばれるか。
- 2) チタンの清浄表面の仕事関数を 4.3eV とすると、この表面で1) の現象を起こし得る最も長い光の波長（これを臨界波長という） λ_0 はいくらになるか、求めよ。
- 3) 陰極で得られた電子を陽極との間の電位差 50kV で加速して電子ビームを作り、このビームを X 線発生用の銅ターゲットに照射する。この際、図にあるように、陽極通過後の電子ビームを均一磁場中で、 90° 曲げたい。電子の軌道半径を 100mm とした時に必要な磁束密度 B を求めよ。

4) 『 』に入る正しい同一語句を次の中から1つ選択せよ。

電子ビームは、陽極である金属ターゲットに照射され、ビームエネルギーが小さい場合は主に電離損失が、そして、ビームエネルギーが大きくなると主に『 』により、その運動エネルギーを失っていく。発生したX線のスペクトルには、図にあるように、広い波長範囲に渡る連続スペクトルと特定波長の部分に大きな強度をもつ鋭い線スペクトルが見られる。前者は『 』により発生したX線であり、後者は固有X線、または、特性X線と呼ばれるX線である。

- ① 『 放射損失 』 ② 『 制動放射 』
 ③ 『 自由電子効果 』 ④ 『 核損失 』



5) 50kVで加速した、電流10mAの電子ビームが、すべて銅ターゲットに入射した場合に放出される波長0.15nmの K_{α} 固有X線強度を、毎秒当たりの光子数として求めよ。ここで、X線源に十分に厚い銅ターゲットを使用した場合、その固有X線の、全放出方向に対する電子1個当たりの光子数 I_p は、以下の式で表せることとする。

$$I_p = 6.4 \times 10^5 \left\{ \left(\frac{E_e}{E_x} \right) - 1 \right\}^2$$

ここで、 E_e は電子1個当たりの運動エネルギー、 E_x は K_{α} 線の光子1個当たりのエネルギーである。

6) バックグラウンドのX線を除去し、 K_{α} 線だけを取り出し、量子効率の測定対象となるチタンに照射した。この時、 0.2cm^2 の照射面積において、 $0.5\mu\text{A}$ の電子電流が観測された。実際の実験では、 K_{α} 線の光子数を直接計測できないため、 0.1cm^2 の受光面積をもつ強度計で測定したところ、 0.4W であった。チタン表面及び強度計へのX線照射は、その照射面積内で均一であった。これらの測定値を用いて、銅の K_{α} 線で照射されたチタンの量子効率 η を計算せよ。

第7問 実験物理Ⅱ

1. 物質中でガンマ線が吸収される過程のうち主要なものは

- (a) コンプトン散乱
- (b) 光電効果
- (c) 電子・陽電子対生成

である。コンプトン散乱はガンマ線と電子の弾性散乱であり、ガンマ線のエネルギー領域で物質中の電子は自由電子と見なして良い。次の(1)～(3)に答えよ。数値計算では、電子の質量として $0.5 \text{ MeV}/c^2$ を用い、有効数字1桁で解答すること。

(1) (a)、(b)、(c)のうち、入射ガンマ線エネルギーがある一定の値(しきい値)以上にならないと起きない過程がある。その過程は(a)、(b)、(c)のどれか。また、しきい値を答えよ。

(2) エネルギー E のガンマ線が、コンプトン散乱により入射方向に対して θ の角度に散乱された場合、散乱後のガンマ線のエネルギー E' および電子の運動エネルギー T を求めよ。ただし、電子の質量を m とする。(自然単位系、 $h=c=1$ を用いて解答しても良い。)

(3) T が最大(T_{max})となるのはどのような場合か。また、 $E = 1 \text{ MeV}$ の場合、 T_{max} は何 MeVか。

2. ある放射性同位元素が 1 MeV のガンマ線と、最大エネルギー 1.8 MeV のベータ線及び最大エネルギー 0.8 MeV のベータ線を放射するものとする。この放射性同位元素をカプセルに封入した放射線源と、 $\text{NaI}(\text{Tl})$ シンチレーターおよび光電子増倍管を用いて、 1 MeV のガンマ線に対する $\text{NaI}(\text{Tl})$ シンチレーターの応答をできるだけ正確に測定したい。ガンマ線は、放射線源から $\text{NaI}(\text{Tl})$ シンチレーターに達するまでの間に途中にある物質によりコンプトン散乱を受けると、エネルギーが変わってしまう。そこで、小角度に散乱されたガンマ線以外は $\text{NaI}(\text{Tl})$ シンチレーターに入射しないようにするため、円筒形の鉛のコリメーターを用いる。これらを図1のように配置するものとして、次の(1)～(3)に答えよ。ただし、図1は断面図を示したものである。なお、文末の[補足説明1]～[補足説明3]を参照して解答しても良い。

(1) この放射線源からは、カプセルを透過したベータ線も放射されている。ガンマ線だけを測定するために、 1cm 、 1mm 、 0.1mm の3種類の厚さの鉛板(またはフォイル)から適当なものを選び、図1のPまたはQの位置に挿入することにする。最適な鉛の厚さと挿入するべき位置を、理由を付して答えよ。

(2) この放射線源から放射されるガンマ線だけを測定し、図2のような光電子増倍管からの出力パルスの波高分布が得られたとする。光電子増倍管から得られる出力パルスの波高は、放射線がNaI(Tl)シンチレーター中で失ったエネルギーに比例するものとする。図中のAのピークとBの連続スペクトル部分に含まれる事象は、それぞれ主としてどのような過程に対応するか、またなぜこのような波高分布になるか理由を付して答えよ。

(3) 図2のピークAの幅を生じる主要な原因となり得ると考えられるものを一つ挙げ、理由を説明せよ。

[補足説明1] 電子の物質中での飛程（物質中で荷電粒子が静止するまでに飛行する距離）は、 g/cm^2 単位で表すと、制動放射によるエネルギー損失が小さい場合、良い近似で物質の種類によらず一定とみなせる。運動エネルギー1 MeVの電子の飛程は $0.5 \text{ g}/\text{cm}^2$ 、2 MeVの電子の飛程は $1 \text{ g}/\text{cm}^2$ 程度で、物質の種類によらず一定であるとしてよい。

[補足説明2] 単一エネルギーのガンマ線の細く絞られたビーム（個数 I_0 ）が、厚さ d （cm）の吸収体物質を通過した後にビーム中に残るガンマ線の個数 I は

$$I = I_0 \exp(-\mu d)$$

と書ける。 μ はガンマ線のエネルギーと物質の種類に依存する。吸収体物質の密度を ρ (g/cm^3) とすると、1 MeVのガンマ線に対して、鉛が吸収体物質の場合、 $\mu/\rho = 0.07$ (cm^2/g)、NaIが吸収体物質の場合、 $\mu/\rho = 0.06$ (cm^2/g)である。なお、鉛の密度は $11.36 \text{ g}/\text{cm}^3$ 、NaIの密度は $3.67 \text{ g}/\text{cm}^3$ である。

[補足説明3] NaI(Tl)シンチレーターは、発光量を増やすため、純粋なNaI（沃化ナトリウム）に少量のタリウム（Tl）を活性化物質として混入したものである。タリウムは少量であるため、NaI(Tl)シンチレーターをガンマ線の吸収体物質として考える場合は、無視して良い。

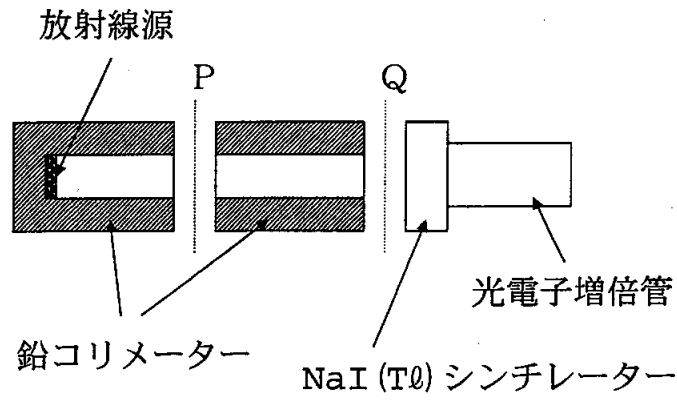


図 1

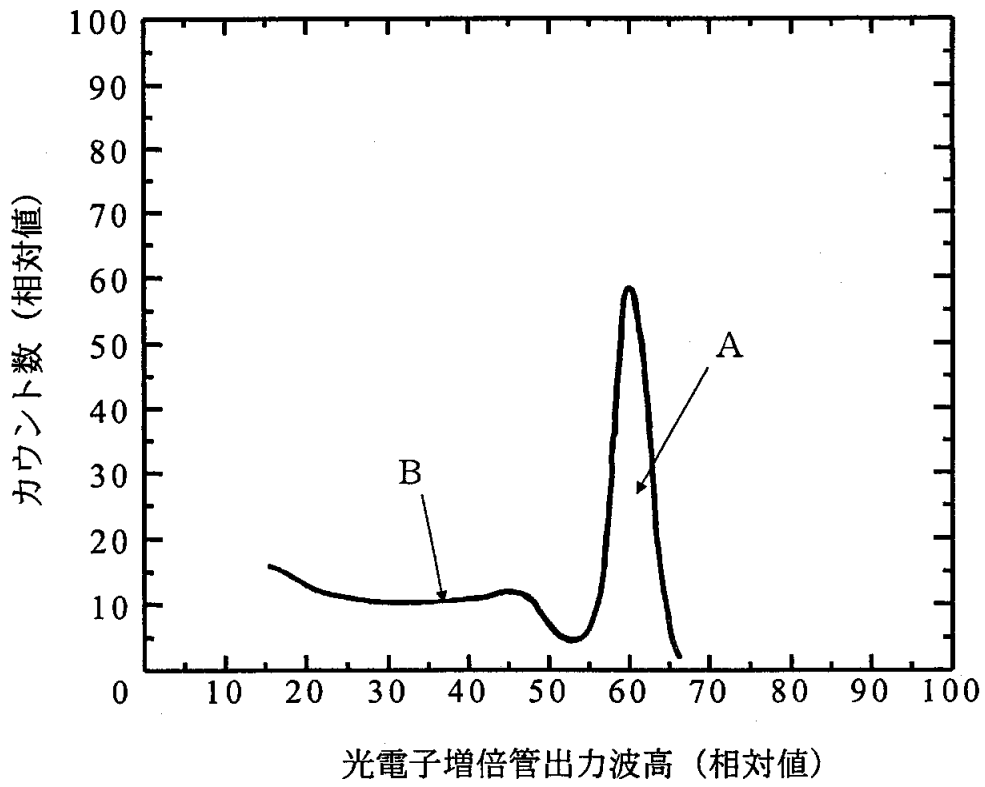
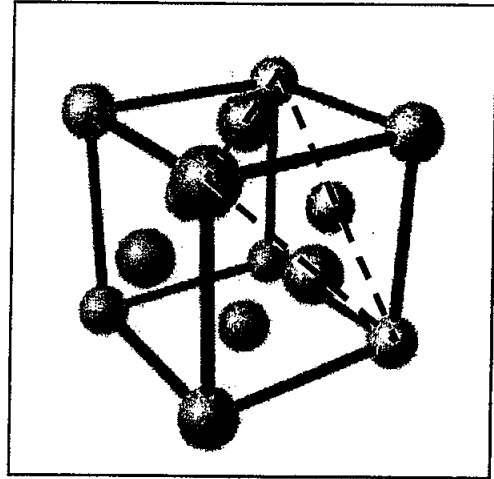


図 2

第8問 固体物理：

銅やニッケルは右図のような面心立方格子を単位格子とする結晶構造を取る事が知られている。この結晶について以下の設問に答えよ。(なお、計算問題については有効数字2桁まで求めよ。)



1) この単位格子(太線)一つ毎の銅原子の数は何個か。

2) 銅における単位格子の一辺の長さ a は 0.36nm である。銅の密度を g/cm^3 の単位で求めよ。(なお、銅の原子量 M は 63.6 、アボガドロ数 N_A は $6.0 \times 10^{23} \text{mol}^{-1}$ とする。)

3) 銅結晶の構造を確かめるために X 線回折測定を行なう。回折が起こる条件は、結晶面間の距離を d 、入射角を θ 、X 線の波長を λ として

$$2d \cdot \sin \theta = \lambda$$

で表される。(111)面(図中点線で示す)からの回折を観測するために必要な X 線の最低エネルギー E を eV 単位で求めよ。(なお、光速 c は $3.0 \times 10^8 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 、プランク定数 h は $6.6 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$ 、 1eV は $1.6 \times 10^{-19} \text{J}$ とする。)

4) 中性子線を用いて 3) と同様の測定を行なう場合、対応する中性子線のエネルギーを eV 単位で求めよ。なお、質量 m の粒子のエネルギー E と de Broglie 波長の関係は $E = h^2 / (2m\lambda^2)$ 、中性子の質量は $1.67 \times 10^{-27} \text{kg}$ である。

5) 同じ結晶構造を持つニッケル(格子定数 a は 0.35nm) にスピン偏極したミュオン (μ 粒子) を注入すると図中で面心位置にある原子 6 個を頂点に持つ八面体の中心に止まることが知られている。ニッケル原子が強磁性状態にある場合にミュオンの位置で磁気双極子モーメントが作る磁場の大きさを評価し、ミュオンスピンの運動を予想せよ。なお、ニッケル原子一個の磁気モーメントを $0.6\mu_B$ とし、 μ_B の大きさを $9.3 \times 10^{-24} \text{J/T}$ ($=9.3 \times 10^{-21} \text{emu}$)、ミュオンの磁気回転比を $2\pi \times 135.5 \text{MHz/T}$ とする。