

総合研究大学院大学高エネルギー加速器科学研究科

5年一貫制博士課程入学試験問題

物 理

平成19年8月30日（木）13時00分～16時00分

注意

- ☆ 答案用紙の所定の欄に、受験番号、氏名を記入すること。
- ☆ 各自に計算用紙1枚が配布されていることを確認すること。
- ☆ 7問の中から、4問を選んで解答せよ。

ただし、素粒子原子核宇宙理論分野を第1志望とする受験者は第1問（量子力学）を必ず選択しなければならない。

- ☆ 試験問題（4問）ごとに、異なった答案用紙を使用すること。
- ☆ 各問題に対して、答案用紙は複数使用してよいが、第〇〇問□□枚目というように、所定の欄に、選択した問題の番号及び答案用紙の順番を記入すること。

解答できない場合も、受験番号、氏名、問題番号を記入し、提出すること。

第1問 量子力学

2次元の調和振動子を考えよう。ハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

に対して、正準交換関係 $[x, p_x] = i\hbar$, $[y, p_y] = i\hbar$ を課す。このとき、昇降演算

子 $a_x, a_x^\dagger, a_y, a_y^\dagger$ を

$$a_x = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}(m\omega x + ip_x), \quad a_x^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}(m\omega x - ip_x),$$
$$a_y = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}(m\omega y + ip_y), \quad a_y^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}(m\omega y - ip_y)$$

と定義すれば、これらは交換関係 $[a_x, a_x^\dagger] = 1, [a_y, a_y^\dagger] = 1$ (その他はゼロ) を満たす。

このとき、

- (1) 演算子 $N_x \equiv a_x^\dagger a_x, N_y \equiv a_y^\dagger a_y$ を定義する。 N_i と a_i 、および N_i と a_i^\dagger の交換関係

をそれぞれ求めよ。また、ハミルトニアンを N_i を用いて書け。ただし、 i は x または y を表わす。

- (2) N_x と N_y は互いに交換するので同時対角化可能である。固有状態を $|n_x n_y\rangle$ と

書いてその N_x と N_y の固有値をそれぞれ n_x, n_y とするとき、

$a_x |n_x n_y\rangle, a_x^\dagger |n_x n_y\rangle, a_y |n_x n_y\rangle, a_y^\dagger |n_x n_y\rangle$ も N_x と N_y の固有値になっていることを

示し、それぞれの固有値を求めよ。

- (3) 基底状態 $|0\rangle$ は $a_x |0\rangle = a_y |0\rangle = 0$ を満たす。このとき、関数

$$u_0(x, y) = C \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2 + y^2)\right]$$

が基底状態の座標表示での波動関数になっていることを示せ。また、第一励起状態および第二励起状態の座標表示での波動関数をすべて求めよ。ただし、規格化定数は無視してよい。励起状態は縮退していることに注意すること。

- (4) z 方向の角運動量演算子 $L_z = xp_y - yp_x$ を考える。 L_z と H との交換関係を求

めよ。

- (5) 演算子 $a_x, a_x^\dagger, a_y, a_y^\dagger$ の代わりに、それらの線形結合 $a_+, a_+^\dagger, a_-, a_-^\dagger$ を

$$a_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x \mp ia_y), a_\pm^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x^\dagger \pm ia_y^\dagger) \text{ と定義すると、これらの間の交換関係は、}$$

$[a_\pm, a_\pm^\dagger] = 1$ (その他はゼロ)となることが示せる。 a_\pm, a_\pm^\dagger を使って、 L_z と H をそれぞれ表わせ。

- (6) すべての第一励起状態、第二励起状態を、 L_z と H の両方を対角化する基底

で表わし、それらの L_z の固有値を求めよ。

- (7) いま、この2次元調和振動子の z 方向に弱い一様な定磁場 B をかけると、ハ

ミルトニアンには $-\frac{eB}{2mc}L_z$ が加わる。このとき、元のハミルトニアンの基

底状態、第一励起状態、第二励起状態のエネルギー準位はどう影響されるか、
図を描いて議論せよ。

第2問 統計力学

黒体放射の統計力学的性質を理解するために以下の問題を考えよう。黒体放射は、無数の異なる角振動数を持つ調和振動子の集まりと考えられる。本問においてボルツマン定数 $k = 1$ とする。

1. 特定の角振動数 ω を持つ調和振動子系のエネルギーは、粒子（フォトン）数に比例する。温度 T および化学ポテンシャル μ がそれぞれ一定の条件での分配関数を計算し、付随する熱力学関数 J は以下の式で与えられることを示せ。

$$J = T \ln \left(1 - e^{-\frac{\mu - \hbar\omega}{T}} \right)$$

2. 熱力学関数 J から、粒子数 N とエントロピー S を求めよ。

ヒント：
$$dJ = -SdT - pdV - Nd\mu$$

3. エントロピー S は、粒子数 N のみによって以下の式で与えられることを示し、エントロピーが変化しない（断熱的）プロセスの条件を求めよ。

$$S = (N + 1) \ln(N + 1) - N \ln N$$

4. この系の断熱的変化に付随する仕事 W は、以下の式で与えられることを示せ。

$$dW = -N\hbar \frac{d\omega}{dV} dV$$

5. 黒体放射の化学ポテンシャルは $\mu = 0$ であるが、その物理的理由を説明せよ。
6. 黒体放射は、角振動数が3次元波数ベクトルの長さに比例する、無数の調和振動子の集まりである。等方的な黒体放射の圧力は、エネルギー密度の $1/3$ であることを示せ。

第3問 電磁気学

問題1. 真空中で、半径 a 、間隔 d の導体の円形平行板コンデンサに電荷 $\pm Q$ が蓄えられている。このコンデンサは孤立しており、電池などとは接続されていない。以下、 $a \gg d$ とし、端部の影響は無視してよい。単位系は SI(MKSA) 単位系とする (真空の誘電率を ϵ_0 とせよ)。

1-1) この時の電極間の電場 E を求めよ。

1-2) コンデンサに蓄えられている電場のエネルギー U を求めよ。

1-3) 今、間隔 d が微少量 Δd だけ増加したときのエネルギーの変化を ΔU とするとき、電極間に働く力 F と Δd 、 ΔU の関係を書け。また、それを用いて F を求めよ。力の符号は反発力を正とする。

1-4) $|F|$ と $|QE|$ は等しいか。等しくない場合はその理由を論ぜよ。

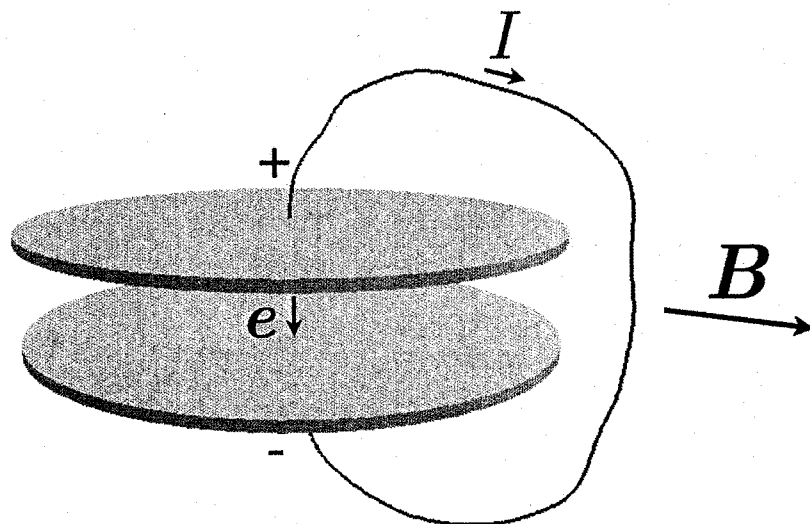
問題2. 問題1のコンデンサが、電圧 V の十分な容量の電池に接続されていて、常に電圧が一定に保たれているとする。

2-1) 電圧 V と電荷 Q の関係を書け (両者の符号は等しいとする)。

2-2) コンデンサーに蓄えられている電場のエネルギー U を、 Q の代わりに V を使って書け。

2-3) この場合、電極間に働く力 F は、問題1-3で求めたものと同じ関係を満たすかどうか答えよ。いずれの場合もその理由と共に論ぜよ。

問題3. 問題1のコンデンサ(孤立している)がその板と平行な外部一様定磁場 B (ベクトル)の中に静止して置かれている。



3-1) 今、 $t=0$ で図のように電気抵抗 R の導線で電極板の外側の中心同士を短絡した。以後この導線を流れる電流 $I(t)$ を時間 t の関数で書け。なお、導線のインダクタンスは無視する。

3-2) この導線全体に磁場 B が及ぼす合計の力 f (ベクトル)を時間の関数で書け。なお、図のような陽極中心から陰極中心に向かう単位ベクトル e を用いてもかまわない。

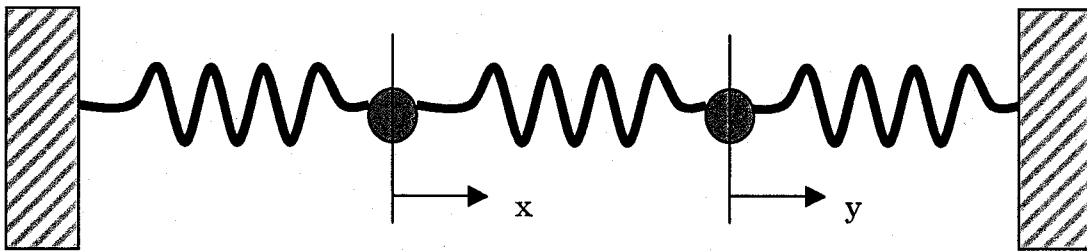
3-3) 3-2で求めた力 f を時間 $t=0$ から $t=\infty$ まで積分し、導線がコンデンサの放電中に受け取る運動量 p (ベクトル)を求めよ。導線が他に受ける力は無視する。

3-4) 運動量保存の法則があるので、導線が受け取った運動量 p は何かの運動量とバランスしているはずである。それは何か。定量的に答えよ。

第4問 古典力学

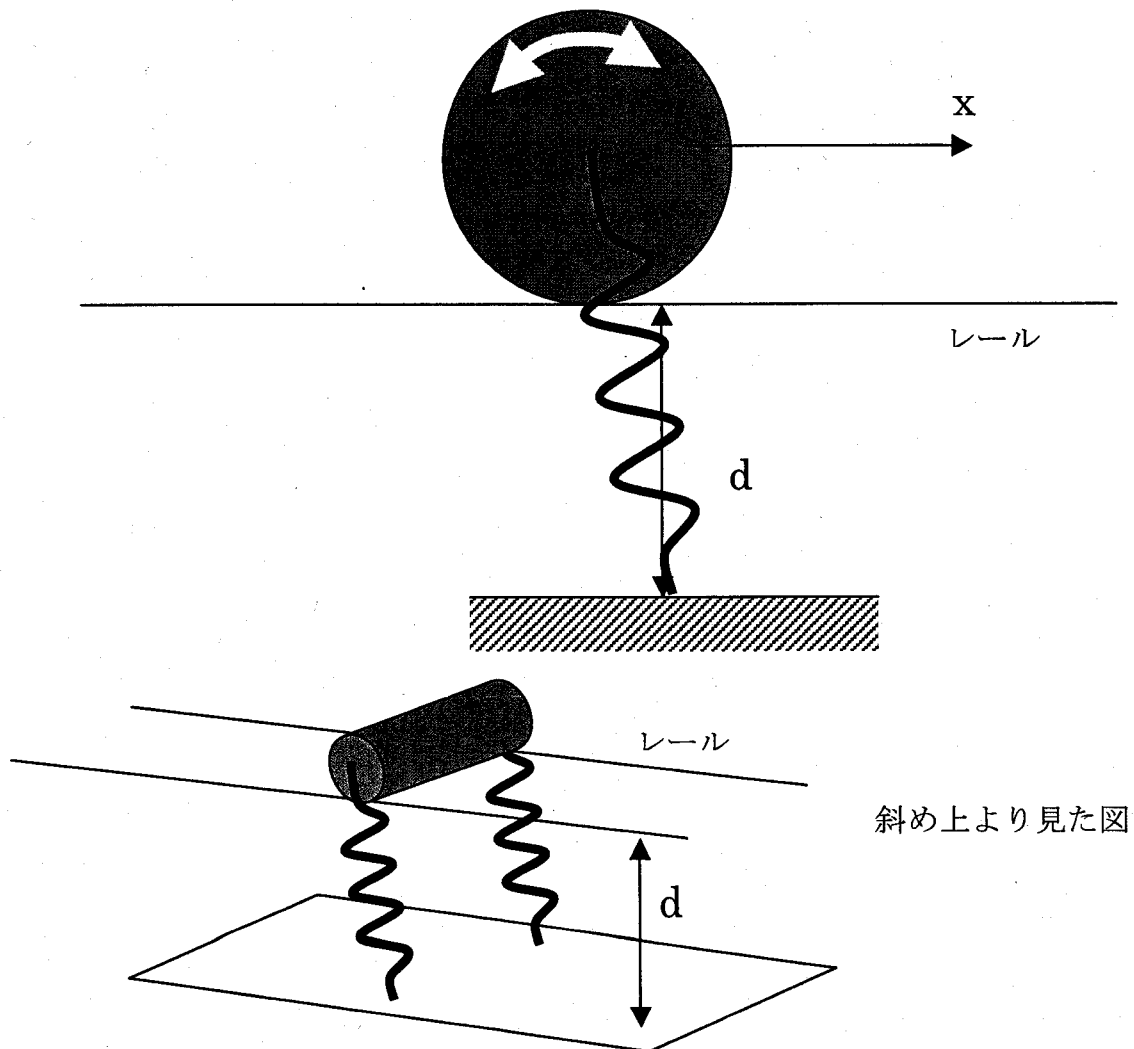
問1 以下の図のように3つのバネでつながれた質量 m の物体(質点)が2つある。両端は壁につながれ、バネ定数はすべて k である。運動はバネの伸縮する方向のみ許され、平衡位置からの物体の変位をそれぞれ x 、 y とする。

- (1) 物体に対する運動方程式を書け。
- (2) この系の固有振動数を求めよ。
- (3) 各固有モードにおける変位 x と y の間の関係を求めよ。



問2 レール上に一様な密度を持った質量 M 、半径 R の円筒形の剛体が置かれている。剛体の中心は図のように、レール下距離 d に取り付けられた 2 つのバネによって引きつけられ、束縛されている。以下に従って平衡位置からの変位 x に関する微小振動を解こう。バネ定数は 1 本あたり $k/2$ 、バネの自然長(力がかかっていないときの長さ) l_0 は $d+R-l_0 \gg |x|$ を満たす。剛体とレールは滑らないし、摩擦も考えない。

- (1) 円柱剛体の中心軸の周りの回転運動エネルギーが $T_{rot} = \frac{1}{2} \int \rho r^2 \dot{\theta}^2 dV$ で表されることを証明し、それを求めよ(積分を実行せよ)。ここで ρ は密度、 θ は回転角、 r は中心からの距離、 dV は体積に関する積分を意味する。
- (2) この系に関するラグランジアンを書け。
- (3) 微小振動として運動方程式を解き、振動数を求めよ。



第5問 (物質科学・分子科学)

1. 元素の周期表の一部を表1に示す。

表1. 元素の周期表

属 周期	1A	2A	3A	4A	5A	6A	7A	8		1B	2B	3B	4B	5B	6B	7B	0	
1	H																He	
2	Li	Be											B	あ	N	O	F	Ne
3	Na	Mg											Al	い	P	S	Cl	Ar
4	う	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	え	Co	Ni	お	Zn	Ga	Ge	か	き	Br	Kr
5	Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	く	Pd	Ag	Cd	In	Sn	Sb	Te	け	こ

- 「あ」、「い」、「う」、「え」、「お」、「か」、「き」、「く」、「け」、「こ」に入る元素の名と記号を答えよ。
- 「あ」に入る元素の代表的な2種類の結晶の構造の図を描け。この2種類の結晶構造を原子価結合法に基づいて説明せよ。また、この2種類の結晶の物性についてそれぞれ簡潔に述べよ。
- 「い」、「お」に入る元素の結晶の構造、物性についてそれぞれ簡潔に述べよ。

2. Bohr のモデルによれば電荷 $+Ze$ の核と1つの電子からなる水素類似原子の量子数 n の軌道のエネルギー E_n と軌道半径 r_n は

$$E_n = -\frac{\mu Z^2 e^4}{2n^2 \hbar^2 (4\pi\epsilon_0)^2}, \quad r_n = n^2 \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{\mu Z e^2}$$

で与えられる。ただし、 μ は系の換算質量、 e は電気素量、 ϵ_0 は真空の誘電率である。

- 水素原子の量子数 $n=1$ に対応する軌道半径 (ボーア半径) を a_0 、軌道のエネルギーを E_1 とする。量子数 $n=2, 3, 4$ に対応する軌道半径 r_2, r_3, r_4 を、 a_0 を用いて表せ。また、量子数 $n=2, 3, 4$ に対応するエネルギー E_2, E_3, E_4 を、 E_1 を用いて表せ。
- 水素原子の量子数 $n=1$ に対応する軌道半径 a_0 は 0.0529 nm 、軌道のエネルギー E_1 は -13.6 eV である ($1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$)。He⁺イオンの量子数 $n=1$ に対応する軌道半径 $r_1(\text{He}^+)$ 、軌道のエネルギー $E_1(\text{He}^+)$ を有効数字2桁で求めよ。
- 水素の原子核の質量 (m_p) は $1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ 、電子の質量 (m_e) は $9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ である。これに対し、正ミューオンは、電気素量に等しい正の電荷を持ち、質量は電子の207倍である ($1.88 \times 10^{-28} \text{ kg}$)。水素原子の陽子を正ミューオンに置き換えたとき、量子数 $n=1$ に対応する軌道のエネルギー E_1 はどのように変化するか。また、軌道半径 r_1 はどのように変化するか。
- 基底状態にある水素原子のイオン化エネルギーを測定する装置を組み立てるために、真空排気セット、真空槽、水素原子源、エネルギー可変真空紫外光源 ($10 \sim 30 \text{ eV}$ 、エネルギー較正済み)、イオン加速電極 ($+100 \text{ V}$)、イオン捕集電極 (0 V)、微小電流計を用意した。これらを用いた実験装置の構成図を描け。また、水素原子のイオン化エネルギーを求める実験手順を記せ。

5) 量子力学では水素類似原子のエネルギー固有関数 ϕ と固有エネルギー E は時間に依存しない Schrödinger 方程式 (エネルギーの固有方程式) から求まる。水素類似原子を図1のように表示するとき、水素類似原子のエネルギーの固有方程式を記述せよ。

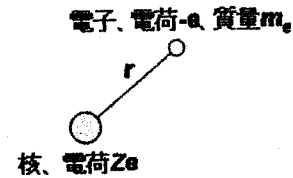


図1. 水素類似原子。

6) 水素原子の1s軌道の固有関数 ϕ_{1s} の動径部分は

$$R_{1s} = \left(\frac{1}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} 2e^{-\frac{r}{a_0}}$$

である。ここで、 a_0 はボーア半径である。公式

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^{n-1} dx = \frac{(n-1)!}{a^n}$$

を利用して r の期待値 $\langle r \rangle$ を求めよ。

7) 水素分子 (H_2) の分子軌道 $1\sigma_g$ (結合性軌道) と $1\sigma_u$ (反結合性軌道) が水素原子 (H) の原子軌道 (1s) から構成される様子を図2のように模式的に表すことにする。同様に、窒素分子 (N_2) の分子軌道 ($1\sigma_g$, $1\sigma_u$, $2\sigma_g$, $2\sigma_u$, $1\pi_u$, $3\sigma_g$, $1\pi_g^*$, $3\sigma_u^*$, 「*」は非占有軌道を表す) が窒素原子 (N) の原子軌道 (1s, 2s, $2p_x$, $2p_y$, $2p_z$) から構成される様子を模式的に表せ。ただし、Nの原子軌道を図3のように表すことにする。

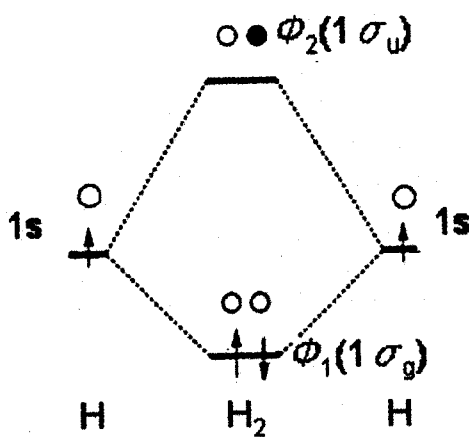


図2. 水素分子 (H_2) の分子軌道の構成。図の上下はエネルギーの高低を表す。分子軌道を構成する際の係数の絶対値は原子軌道を表す図形 (1s 軌道は○で表示) の大きさに反映させており、係数の符号は白黒で区別している。矢印は電子、矢印の向きはスピンの向きを表す。

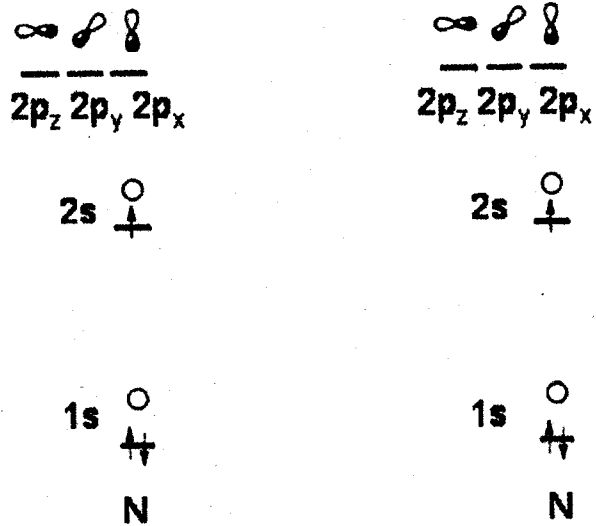


図3. 2つの窒素原子 (N) の原子軌道の模式図。図の上下はエネルギーの高低を表す。実際はN 1s軌道の準位はずっと深いが便宜的に浅く描いてある。結合軸方向をz軸とする。

第6問 量子・統計

半導体である Si 結晶中にリン(P)をドーピングした場合を考えよう。Si は最外殻電子を4個持っており全て結合に使われているが、最外殻に5個電子をもっているリンは、結合電子以外に1個電子が余る。このような原子をドナーと呼ぶ。以下の設問に答えよ。

- ドナー原子が熱などのエネルギーを受け取ることによって、余った電子を伝導帯に放出すると、伝導電子が生まれ電気伝導に寄与する。
 - 電子はスピンを持つフェルミ粒子であるからフェルミ統計に従って分布する。絶対温度 T 、化学ポテンシャルを μ としてフェルミ-ディラック分布関数 $f(E)$ を記述せよ。
 - 伝導帯(conduction band)の底のエネルギーを E_C 、価電子帯(valence band)の最高エネルギーを E_V 、 E_C とドナー準位のエネルギー差を ΔE_d とし、エネルギーの大小関係に注意してエネルギー準位を定性的に図示せよ。
- 単位体積当たりの、ドナー原子の数を N_d 、ドナー準位にある電子数を n_d 、伝導帯にある伝導電子の数を n とする。ただし、1つのドナー準位に2個の電子は同時に入らないものとし、また伝導帯の電子は縮退していないとする。なお、Stirling の公式 $\log N! \approx N \log N - N$ を使ってもよい。
 - ドナー準位にある電子の自由エネルギー F を求めよ。但し、状態の総数を W 、ボルツマン定数を k_B としたときにエントロピーは $S = k_B \log(W)$ で与えられる。
 - ドナー準位にある電子の化学ポテンシャル μ が $\mu = \partial F / \partial n_d$ であることに注意して次式が成り立つことを示せ。

$$\frac{n(N_d - n_d)}{n_d} = \frac{1}{2} N_C \exp\left(-\frac{\Delta E_d}{k_B T}\right) \quad (1)$$

但し、伝導電子の数 n は次式であることを使ってよい。

$$n = N_C \exp\left(\frac{\mu}{k_B T}\right) \quad (2)$$

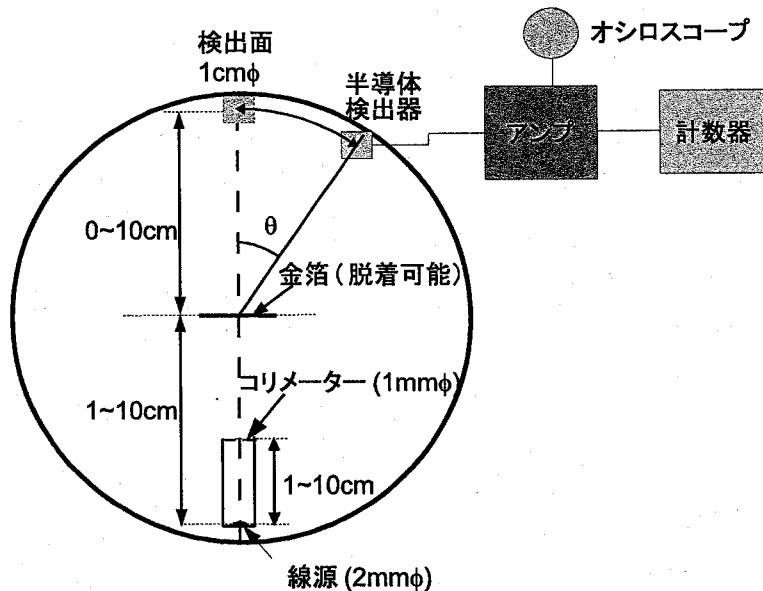
ここで N_C は伝導帯における有効状態密度で、伝導電子の有効質量を m^* としたとき

$$N_C = 2(2\pi \cdot m^* k_B T / h^2)^{3/2} \quad (3)$$

である。

- 式(1)の物理的な意味を記せ。

第7問 実験物理



上図に示すように、円形の密閉容器の中に鉛の円筒状のコリメーターのついた密封線源と半導体検出器を設置する。線源および検出器は容器の中心から半径10cmまでの位置におくことができる。またコリメーターの長さは1cm刻みで10cmまで変えることができる。線源は5.48 MeVのエネルギーの α 線を放射し、半減期は十分長いものとする。半導体検出器は容器の中心からの距離を変えずに回転することができ、その回転角 θ は容器の外側から変えられる。容器の中央には取り外し可能な非常に薄い金箔を置く。半導体検出器は容器の外の信号増幅回路（アンプ）に接続されており、半導体検出器でとらえられた α 線のエネルギーに比例した波高をもつ信号が出力される。この信号はオシロスコープと信号を数える計数器に接続されている。検出器に線源からの α 粒子1個が検出されると、計数器は1カウント増える。容器には真空ポンプがつながっていて、実験中は容器内は真空に保つ。この時以下の問いに答えよ。

まず中央の金箔を取り外して、線源、容器の中心、および半導体検出器の検出面が直線上に並ぶように配置する。線源と検出器の検出面はそれぞれ容器の中心から10cmの位置におく。

1. 真空ポンプを動作させず、容器内に空気が満たされた状態ではどのような信号がオシロスコープで観察されるか？理由とともに述べよ。
2. 線源からの α 線をコリメーターで絞って、容器中心を通る直線上に設置した半導体検出器の検出面のみにあたるようにしたい。この時コリメーターの円筒の長さは何cmにすればよいか？ただし線源の形、コリメーターの開口、検

出器の検出面は全て円形であり、大きさは図に示すようにそれぞれ直径 2mm、1mm、1cm である。

次に容器を開け、中央に図のように金箔を入れる。金箔は線源と容器中心を結ぶ線に対して垂直になるように設置する。容器内は再び真空にする。線源からの α 線は金箔により散乱される。これはラザフォード散乱と呼ばれる。 α 線が角度 θ に散乱される確率は以下の式により与えられる。

$$\sigma(\theta) = \left(\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{Mv_0^2} \right)^n \left(\frac{1}{\sin(\theta/2)} \right)^m \quad (1)$$

ここで Z はターゲット（ここでは金箔）の原子番号、 M は α 粒子の質量、 v_0 は α 粒子の入射速度、 θ は散乱角、 e は電子の電荷、 ϵ_0 は真空誘電率であり、また n 、 m はある整数である。

3. ラザフォード散乱は α 粒子がターゲットに衝突した時に原子と相互作用を行なって散乱する現象である。
 - (a) この相互作用を何と呼ぶか。
 - (b) α 粒子と原子の距離を r としたときの相互作用による力の大きさ F を、(1) 式にあらわれるパラメーターを用いて記せ。
 - (c) 整数 n の値を答えよ。
 - (d) ラザフォードは原子内のある構造を仮定して (1) 式を得た。その構造を説明せよ。
4. 図の装置を用いて、半導体検出器を回転させて複数の角度で単位時間あたりのカウント数を調べた。その結果を表 1 に示す。表から任意の 3 つの角度のデータを選び、整数 m の値を推定せよ。
5. 金箔のかわりに銀箔を使った場合には、カウント数はどう変化するか？
6. ラザフォード散乱の実験は、1909 年にガイガーとマースデンによって初めて行なわれた。当時は半導体検出器はなかったので、 α 線の検出には薄い硫化亜鉛 (ZnS) の膜を張った顕微鏡を用いた。硫化亜鉛の膜は α 線があたると光 (シンチレーション光) を発するので、顕微鏡を用いて単位時間あたりの発光数を肉眼で数えることにより測定を行なった。しかしこの方法では毎分 90 カウント以上、もしくは 5 カウント以下では正確に発光数を数えることが困難である。測定されるカウント数は角度により大きく変化するため、同じ実験条件で測定すると、この範囲に収まらない場合がある。

そこで

- (a) 全ての測定点においてカウント数を上記の制限の中に収めるためには実験条件をどのように変更すればよいか？
- (b) 実験条件を変えて測定した各測定点でのカウント数を比較するためには何に留意すればよいか。

角度 θ (単位：度)	$\sin(\theta/2)$	単位時間あたりのカウント数
150	0.966	33.1
135	0.924	43.0
120	0.866	51.9
105	0.793	69.5
75	0.609	211
60	0.5	477
45	0.383	1435
37.5	0.321	3300
30	0.259	7800
22.5	0.195	27300
15	0.131	132000

表 1: 角度を変えて測定した単位時間あたりのカウント数