

総合研究大学院大学高エネルギー加速器科学研究科

5年一貫制博士課程入学試験問題

数 学

平成19年8月30日（木）9時30分～10時50分

注意

- ☆ 答案用紙の所定の欄に、受験番号、氏名を記入すること。
 - ☆ 各自に計算用紙1枚が配布されていることを確認すること。
 - ☆ 試験問題（4問）ごとに、異なった答案用紙を使用すること。
 - ☆ 各問題に対して、答案用紙は複数使用してよいが、第〇〇問□□
枚目というように、所定の欄に、選択した問題の番号及び答案用
紙の順番を記入すること。
- 解答できない場合も、受験番号、氏名、問題番号を記入し、提出
すること。

数学

第1問

次の式で与えられる数列 x_0, x_1, x_2, \dots を任意の初期値について解きたい。

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0$$

(1) ベクトル

$$X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix}$$

について $X_{n+1} = AX_n$ を満たす行列 A を求めよ。

(2) A の固有値と固有ベクトルをもとめよ。また $P^{-1}AP = M$ (M は対角行列) となる行列 P を求めよ。

(3) x_k を x_0 と x_1 で表せ。

第2問

(1)

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \exp(-ax^2) dx, \quad (a > 0)$$

とするとき c_0, c_1, c_2 を求めよ。ただし、 c_0 を求める際に、

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) dx \right)^2 = \iint \exp[-a(x^2 + y^2)] dx dy$$

であることを用いよ。

(2) 2つの実数 x_1, x_2 を $\exp(-ax^2)$ に比例する確率 $P(x)$ で独立に発生させる。 a は正定数である。このとき $(x_1 - x_2)^2$ の期待値を求めよ。

第3問

微分方程式

$$y = xp - e^p, \quad (p = dy/dx)$$

について以下の問いに答えよ。

- (1) 両辺を x で微分することによって、解の満たすべき条件が2種類あることを示せ。
- (2) この方程式の一般解と特解を求めよ。また特解の接線が、一般解に含まれることを示せ。

第4問

以下の(1)(2)の積分は留数定理を用いて実行することができる。積分経路を図示し、積分を行え。

$$(1) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+p\cos\theta}, \quad (0 < p < 1)$$

$$(2) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}$$