

総合研究大学院大学高エネルギー加速器科学研究科

物質構造科学専攻 専門科目

5年一貫制博士課程入学試験問題

平成27年8月26日(水) 13時00分～16時00分

注意

- ☆ 答案用紙の所定の欄に、受験番号、氏名を記入すること。
- ☆ 各自に計算用紙1枚が配布されていることを確認すること。
- ☆ 数学基本問題、数学標準問題、物理基本問題、物理標準問題、化学基本問題、化学標準問題、生物基本問題、生物標準問題の中から、4つを選んで解答すること。
- ☆ 各自、採点を希望する4つの問題の答案用紙だけを試験終了時に提出すること。
- ☆ 各問題に対して、答案用紙は複数使用してよいが、(○○○○)問題(□)枚目「例えば、(数学 基本)問題 (1)枚目」というように、所定の欄に、選択した問題名および答案用紙の順番を記入すること。解答できない場合も、受験番号、氏名、問題名を記入して提出すること。
- ☆ 答案用紙・計算用紙がさらに必要な場合は、挙手をして監督者に知らせること。

問題は次頁

数学 基本問題

第1問

n 次の行列 A , T および U を考える. 以下の問いに答えよ.

【問1】

行列 T が正則ならば, 任意の整数 $m \geq 0$ に対して,

$$(T^{-1}AT)^m = T^{-1}A^mT$$

で表されることを示せ.

【問2】

行列 A , T , U がそれぞれ,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

のとき, TU および A^m を求めよ.

【問3】

行列 A の階数 (rank) を求めよ.

【問4】

行列 A について, 逆行列 A^{-1} の存在を判定し, A^{-1} が存在する場合はそれを求めよ.

第2問

以下の級数に関する問いに答えよ.

【問1】

等比級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

は $|r| < 1$ のとき収束し, $|r| \geq 1$ ならば発散することを示せ. ただし, a は 0 ではないとする.

【問2】

指数関数

$$e^{-2x}$$

を $x=0$ の周りで級数展開し, その級数が $|x| < \infty$ で収束することを示せ.

数学 標準問題

第1問

次の積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

を $\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-(x^2+y^2)} = \pi$ であることを示してから計算せよ.

第2問

次の方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi(x, t) = 0$$

を, $-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$ の範囲で, $|x| \rightarrow \infty$ で $\phi \rightarrow 0$, および, 初期条件 $\phi(x, 0) = f(x)$ を使って解くことを考える.

【問1】 $\phi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \bar{\phi}(k, t)$ としたときの $\bar{\phi}(k, t)$ の従う方程式を導け.

【問2】 問1の解が $\bar{\phi}(k, t) = A(k)e^{-k^2 t}$ であることを示してから, $\phi(x, t)$ を $f(x)$ を使って表せ.

【問3】 問2で求められる $\phi(x, t)$ の x 積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, t) dx$ が t に依らないことを示せ.

【問4】 $f(x) = e^{-ax^2}$ ($a > 0$) の場合に $\phi(x, t)$ を求めよ.

物理基本問題は次頁

物理 基本問題

第1問

質量 m の物体の重力落下の状態を考える。時刻 $t = 0$ で初速度が 0 になるように静かに手を放すと、物体は自由落下を開始した。重力加速度を g として、他にいかなる力も物体に働かないときを考える。ただし、鉛直方向を x 軸とし、物体の初期値は $x(t = 0) = 0$ 、重力方向を負の方向とする。

【問1】

時刻 t における物体の位置 $x(t)$ を求める運動方程式を m, x, t, g を用いて示せ。

【問2】

上の運動方程式を $t = 0$ における位置と速度の初期条件を考慮して解き、時刻 t における物体の速度 $v(t)$ と位置 $x(t)$ を求め、それらの時間依存性を図示せよ。

第2問

第1問の物体の重力落下の問題で、物体には重力の他に空気抵抗による速度 $v(t)$ に比例する抵抗力が存在し、その比例定数は my である場合を考える。以下の問に答えよ。

【問1】

そのときの運動方程式を書け。

【問2】

上の運動方程式を、第1問の【問2】と同じ初期条件を考慮して解き、時刻 t における物体の速度 $v(t)$ および、位置 $x(t)$ を数式で示せ。また、それらの時間依存性を第1問の【問2】で示した図の上に点線で示せ。

【問3】

抵抗力を考えたときの速度 $v(t)$ は、 $t \rightarrow \infty$ となったとき、ある一定値に漸近する。その値を求めよ。

物理標準問題は次頁

物理 標準問題

N 個の単原子からなる固体の体系を考える。体系では空間的に規則正しく並んだ格子点があり、各原子はそれぞれの格子点付近で微小振動を行っている。体系は、各原子の格子点からの変位を表わす $3N$ 個の座標を持ち、 $3N$ 個の調和振動子で記述できる。いま、同じ基準振動数 ν を持つ独立な $3N$ 個の調和振動子の固有状態の量子数を n_i ($i=1, 2, \dots, 3N$) とし、体系のエネルギー E が

$$E = E_0 + \sum_{i=1}^{3N} \left(n_i + \frac{1}{2} \right) h\nu$$

で表わされ、体系は温度 T で熱平衡にあるとする。 E_0 は定数である。 n_i はそれぞれの i に対して $0 \sim \infty$ の整数値をとる。 h はプランク定数である。この体系について、以下の問に答えよ。ただし、ボルツマン定数は k とし、計算中に現われる $h\nu/k$ は Θ で置き換えること。数列または級数の和や積の計算は実行すること。

【問 1】

分配関数 Z を求めよ。

【問 2】

ヘルムホルツの自由エネルギー F を求めよ。

【問 3】

エントロピー S を求めよ。

【問 4】

定積熱容量 C_V を求めよ。

【問 5】

定積熱容量 C_V は、高温 ($T \gg \Theta$) で、 $C_V \approx 3Nk$ と近似できることを示せ。

【問 6】

定積熱容量 C_V は、低温 ($T \ll \Theta$) で、 $C_V \approx 3Nk(\Theta/T)^2 \exp(-\Theta/T)$ と近似できることを示せ。

【問 7】

定積熱容量 C_V の温度変化の概形を図示せよ。

【問 8】

実際の物質では、格子振動による定積熱容量 C_V は、高温では $C_V \approx 3Nk$ となり、低温では T^3 に比例する温度依存性を示す。しかし、この問題のモデルでは、高温では問 5 に示すようにこの実験事実を説明できるが、低温では問 6 に示すようにこの実験事実を説明できない。理由を述べよ。

化学基本問題は次頁

化学 基本問題

第1問

系を記述する熱力学的な変数について、エネルギー E および体積 V 、圧力 P と表すとす
る。エンタルピー H は $H = E + PV$ と定義される。次の問いに答えよ。ここで、必要であ
れば気体定数 R を用いよ。

【問1】 次の理想気体のエンタルピーを絶対温度 T を用いて表せ。

- (1) 1 mol の単原子理想気体のエンタルピー。
- (2) 2 mol の2原子分子理想気体のエンタルピー。

【問2】 問1 で得られた表式に基づいて、一般的な理想気体のエンタルピーの熱力学的変数
に対する依存性を説明せよ。

第2問

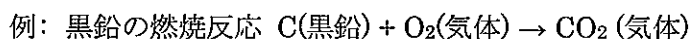
グルコース ($C_6H_{12}O_6$ 固体) の酸化により二酸化炭素と水が生成する。次の問いに従って、
グルコースが酸素により酸化されるときに発生する熱量を計算せよ。標準状態の下で反応
は進行したとし、発生した水は気体状態であるとする。標準生成エンタルピーの値は次の値
であると仮定して計算せよ。

$$CO_2 \text{ (気体)} : -393.5 \text{ kJ mol}^{-1}$$

$$H_2O \text{ (気体)} : -241.8 \text{ kJ mol}^{-1}$$

$$\text{グルコース (固体)} : -1273.2 \text{ kJ mol}^{-1}$$

【問1】 下の例にならひ、グルコースの酸化反応の反応式を書き表せ。

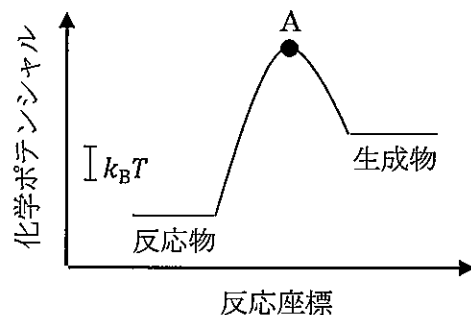


【問2】 気体酸素分子の標準生成エンタルピーの値を上には示していない。その値を答えよ。
その理由も説明せよ。

【問3】 90 g のグルコースが気相酸素により酸化されるときに発生する熱量を、有効桁数 2
桁まで計算せよ。計算の過程も記述せよ。

第3問

一般的な化学反応について、示しているような模式図により、その熱的反応の素過程の活
性・不活性および吸熱性・発熱性を議論することができる。ここでは近似的に、常温・常圧
で進行する素過程を活性、進行しない反応を不活性と呼ぶことにする。



【問1】 化学反応の考察において，模式図の点 A は何と呼ばれているか答えよ。

【問2】 示した模式図にならい，次の熱的反応のポテンシャルの模式図を描け．環境から得られる熱エネルギーの目安となる $k_B T$ も書き入れよ．ここで， k_B は Boltzmann 定数， T は絶対温度とする．

- (1) 不活性な発熱反応．
- (2) 活性な発熱反応．
- (3) 活性な吸熱反応．

【問3】 問2で描いた3つの図に関し， $k_B T$ および反応物・生成物のエネルギー準位の関係について説明せよ．説明にエネルギー関係を示す記号などが他に必要であれば，図中に記号を書き込み，定義を明確にして記述せよ．

第4問

ブタノールには複数の構造異性体が存在する．それらの内のアルコールはすべて常温・常圧では液体であり，ここではそれらの蒸気圧を分子の分極に基づいて検討する．次の問いに答えよ．

【問1】 構造異性体とはどのようなものか説明せよ．

【問2】 安定に存在するブタノールの構造異性体の内，アルコールをすべて列挙せよ．

【問3】 電気陰性度とはどのようなものか説明せよ．

【問4】 問2で挙げた分子の中で，双極子モーメントが最も大きいと予測できるのはどの構造であるのか示し，なぜそう予測したか説明せよ．どのような前提条件で考えたのかわかるように記述せよ．

【問5】 それら構造異性体の蒸気圧の大小関係を予測し，その予測について説明せよ．どのような前提条件の下で予測したのか明確にして記述せよ．

化学 標準問題

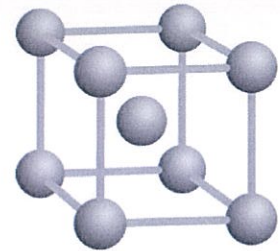
第1問

次にあげる実験手法について4つ選び、測定原理、測定対象物質、どのような情報が得られるかを述べよ。

- (1) 光電子分光法, (2) X線磁気円二色性分光法, (3) X線吸収分光法,
- (4) 蛍光X線分析法, (5) X線回折法, (6) 中性子回折法, (7) X線小角散乱法,
- (8) 中性子小角散乱法, (9) X線反射率法, (10) 中性子反射率法,
- (11) ミュオンスピン回転 (μ SR)法, (12) 陽電子回折法, (13) X線イメージング法,
- (14) X線共鳴散乱法, (15) 中性子非弾性散乱法, (16) X線非弾性散乱法

第2問

タングステン (原子量 183.9) の結晶構造は右図のような体心立方構造 (bcc) である。



【問1】

単位格子あたりのタングステン原子の数は何個か。

【問2】

タングステンの格子定数は 0.316 nm である。タングステンの密度を g/cm^3 の単位で有効数字2桁で求めよ。ただし、アボガドロ数を $6.0 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ とする。

【問3】

タングステン単結晶を(100)表面で切り出した。タングステン(100)表面上の原子数は 1 cm^2 あたりいくらか。有効数字2桁で答えよ。

【問4】

圧力が $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ の気体の酸素分子を考える。分子運動論では圧力 p と単位面積への1秒あたりの分子の衝突数 Z との関係は以下のように表すことができる。

$$p = Z\sqrt{2\pi mkT}$$

ここで、 m (kg) は分子の質量、 k はボルツマン定数 ($1.38 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$)、 T は絶対温度 (K) である。温度 346 K のとき、酸素分子の衝突回数は 1 cm^2 、1秒あたり何回か有効数字2桁で求めよ。酸素分子の 1 mol あたりの質量は 32 g とする。

【問5】

固体表面における物理吸着と化学吸着の違いを述べよ。

【問 6】

タングステン(100)表面上への酸素の化学吸着について、衝突過程が律速となっている簡単なモデルを考える。被覆率とは表面原子の総数を吸着した原子の数で割ったものと定義し、全ての表面原子に酸素原子が吸着したときを被覆率 100%とする。このモデルでは被覆率が低い場合には被覆率と吸着時間は比例すると考えてよい。またタングステン(100)表面に酸素分子が 1 回衝突したとき、吸着される酸素原子の平均的な数は 0.5 個とする。温度 346K でタングステン(100)表面に被覆率 1% まで酸素が吸着するために必要な時間を有効数字 2 桁で計算せよ。ただし、酸素分圧は $1.00 \times 10^{-7} \text{ Pa}$ とする。

生物 基本問題

生体高分子に関する以下の問いに答えよ。

【問 1】

以下の文章の A~K までに当てはまる数字および単語を答えよ。

生体内の鎖状生体高分子として主に(A), (B), (C)の 3 種類が上げられる。(A)はヌクレオチドを基本単位とし、それらが(D)結合によって結合することで鎖状の分子を形成する。(A)のうち、DNA は遺伝情報を保持する分子であり、遺伝情報を発現する際には mRNA へと(E)されたのち、(B)へと(F)される。(B)は生体内に(G)種類あるアミノ酸が(H)結合によって結合することで形成されるものである。(B)を構成する元素は主に炭素、水素、酸素、(I), (J)である。(C)は様々な種類の単糖が(K)結合によって結合したもので細胞骨格の形成や抗原抗体反応に関与するなど生体内において重要な役割を担っている。

【問 2】

DNA 配列に関する以下の問いに答えよ。

- (1) DNA には 4 種類の塩基があり、A, C, G, T の 4 つのアルファベットで略して表される。それぞれの名称を答えよ。また、RNA では、先に挙げた 4 つの塩基のうち 1 つが U に置き換わる。この U の名称および置き換わる塩基の名前を答えよ。
- (2) DNA の 2 重らせん構造とその意義について以下のキーワードを全て用いて 100 文字以内で説明せよ。
(反平行、複製、右巻き、相補的)
- (3) 下に示す DNA 配列から転写される mRNA の配列を示せ。なお、ここに示された DNA 配列は全て転写されるものとする。また、DNA および RNA には方向性があることに留意すること。

5' - GTTACCTACT TTGATAGTCA TATATTCCTC CTGCTAATTT -3'

- (4) 以下のコドン表を用いて、(3)の mRNA から翻訳されるタンパク質のアミノ酸配列を示

せ。なお開始コドンは AUG であるとする。

第一塩基	第二塩基							
	U		C		A		G	
U	UUU	Phe	UCU	Ser	UAU	Try	UGU	Cys
	UUC		UCC		UAC		UGC	
	UUA	Leu	UCA		UAA	終結	UGA	終結
	UUG		UCG		UAG		UGG	Trp
C	CUU	Leu	CCU	Pro	CAU	His	CGU	Arg
	CUC		CCC		CAC		CGC	
	CUA		CCA		CAA	Gln	CGA	
	CUG		CCG		CAG	CGG		
A	AUU	Ile	ACU	Thr	AAU	Asn	AGU	Ser
	AUC		ACC		AAC		AGC	
	AUA		ACA		AAA	AGA		
	AUG	Met	ACG		AAG	Lys	AGG	Arg
G	GUU	Val	GCU	Ala	GAU	Asp	GGU	Gly
	GUC		GCC		GAC		GGC	
	GUA		GCA		GAA	Glu	GGA	
	GUG		GCG		GAG	GGG		

【問 3】

タンパク質の翻訳後修飾について以下の問いに答えよ。

- (1) タンパク質の翻訳後修飾について以下のキーワードを全て用いて 50 文字以内で説明せよ。

(機能の発現, mRNA, ポリペプチド鎖)

- (2) 糖鎖の付加とリン酸化は代表的なタンパク質の翻訳後修飾として知られている。それぞれにおいて修飾を受けるアミノ酸残基の名称を全て答えよ。

【問 4】

溶液中に含まれるタンパク質を検出する手法の一つとして SDS-PAGE(ポリアクリルアミド電気泳動)がある。この手法の目的, および原理について 10 行(250 文字)程度で説明せよ。

生物 標準問題

タンパク質の精製，生化学的解析に関する以下の問いに答えよ。

【問 1】

イオン交換クロマトグラフィーは，タンパク質の持つ電荷を利用して精製する手法である。タンパク質の持つ総電荷は溶液の pH により変化する。

- (1) タンパク質の等電点とは何か説明せよ。
- (2) pH7.0 の緩衝液を用いて，等電点が 5.0 のタンパク質をイオン交換カラムに吸着させて精製するための手順を箇条書きで説明せよ。
- (3) ヒストンなどの DNA 結合タンパク質は等電点が高いものが多い理由を述べよ。
- (4) イオン交換クロマトグラフィー以外にも様々なタンパク質精製法がある。ゲルろ過クロマトグラフィーは，試料を分子サイズにより分離する手法である。どのようにして分離が起こるのか，ゲルろ過クロマトグラフィーの原理を説明せよ。

【問 2】

複合体の結合の強さを表すには平衡解離定数がしばしば用いられる。タンパク質 P と低分子化合物 L が結合して複合体 PL を形成する場合，平衡解離定数 K_D は以下の式で表される。

$$K_D = [P][L]/[PL]$$

ここで[X]は X のモル濃度を表す。低分子化合物 L を加える前の溶液中のタンパク質 P の初濃度を $[P]_0$ とし，L を徐々に加えていく場合を考える。ここで L の添加に伴う溶液の体積の増加は無視できるものとする。

- (1) L を結合していないタンパク質の濃度 $[P]$ を， $[P]_0$ と $[PL]$ を用いて表せ。
- (2) L を結合したタンパク質の割合 $[PL]/[P]_0$ を， K_D と $[L]$ を用いて表せ。
- (3) K_D が $1 \mu\text{M}$ の場合，低分子化合物 L を加えていくと，L を結合したタンパク質の割合はどのように変わるかおおまかなグラフを描け。横軸を $[L]$ として $0 \sim 10 \mu\text{M}$ ，縦軸を $[PL]/[P]_0$ として $0 \sim 1$ の範囲で描き，低分子化合物の濃度が K_D の時の縦軸の値も記入すること。なお， $[P]_0$ は K_D の値よりも十分低いものと仮定する。
- (4) タンパク質 A とタンパク質 B が複合体 AB を形成する場合にも，結合の強さを平衡解離定数で表すことが出来る。複合体 AB をゲルろ過カラムクロマトグラフィーで精製しようとしたところ，複合体 AB が解離してタンパク質 A と B が別々に溶出されてしまった。平衡解離定数と精製条件の関係からどのような原因が考えられるか述べよ。